

日本応用数学会 三部会連携「応用数理セミナー」

三角形・四面体上の補間誤差評価と
その有限要素法への応用

小林 健太(一橋大学)

概要

- 三角形上の補間誤差解析と有限要素法への応用
- 非線形問題の解の精度保証への誤差評価への応用
- $p = 2$ の場合の三角形上の0次および1次補間に対する誤差解析
- 一般の p の場合における、三角形および四面体上のLagrange補間に対する誤差解析

有限要素解について

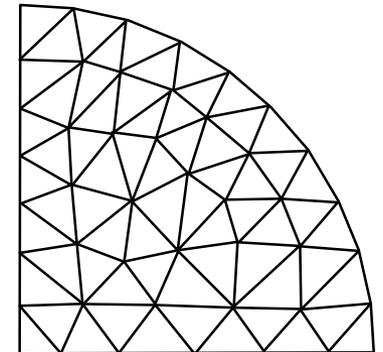
Ω を凸な多角形領域とし、まずはPoisson方程式を考える。

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{弱定式化} \\ (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

Ω を三角形分割し、要素を $\tau_j, j = 1, 2, \dots, m$ とする。

有限要素基底として、区分一次関数 $\varphi_k, k = 1, 2, \dots, n$ を取り、以下を満たす有限要素解 u_h を求める

$$u_h = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \\ (\nabla u_h, \nabla \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$



有限要素解の事前誤差評価

u の一次補間を $\Pi_h u$ とする。 $u \in H^2 \cap H_0^1$ の時には
ここで Ω が凸な多角形領域であるときには
 $u \in H^2 \cap H_0^1$ と $|u|_{H^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ が成り立つので、
有限要素解に対する以下の事前誤差評価が得られる：

Ceaの補題

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|u - \Pi_h u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_j \|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{L^2(\tau_j)}^2 \leq \sum_j C_{\tau_j}^2 |u|_{H^2(\tau_j)}^2 \leq C_{\max}^2 \sum_j |u|_{H^2(\tau_j)}^2 \\ &= C_{\max}^2 |u|_{H^2(\Omega)}^2 = C_{\max}^2 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = C_{\max}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

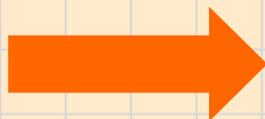
事前誤差評価の応用

例として、以下のような非線形方程式 (Emden方程式) を考える。

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

この方程式の解を、厳密な誤差評価とともに求めたい。

ここで、厳密な誤差評価とは、離散化の細かさに対するオーダーの評価ではなく、具体的な数値による評価のことである。

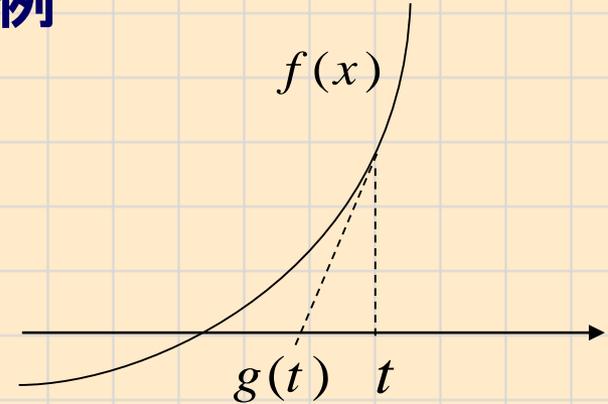


精度保証付き数値計算

精度保証付き数値計算の簡単な応用例

$f(x) = 0$ なる方程式に対し

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ と置く。



このとき $f(x) = 0 \iff g(x) = x$

区間 X について $g(X) \subset X$ が成立すれば

$g(x) = x$ は X の中で解を持つ(縮小写像の原理)。

例 $f(x) = x^{3/2} - 3$ $g(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

$$g([1.5, 3.5]) \subset [0.50, 1.17] + [1.06, 1.64] = [1.56, 2.81] \subset [1.5, 3.5]$$

よって $f(x)$ は $[1.5, 3.5]$ に解を持つ。

計算には区間演算を用いる。

非線形楕円型方程式への応用

ポアソン方程式に対する事前誤差評価は、2階の非線形楕円型偏微分方程式の解の精度保証に重要な役割を果たす。

Emden方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

u_h を近似解、 S_h を有限要素基底で張られる空間、 P_h を S_h への直交射影、

$$U_h = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \in S_h \mid c_k \in [-\beta, \beta] \right\}$$

$$U_* = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid P_h u = 0, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha \right\}$$

とし、候補者集合 $U = u_h + U_h + U_*$ の中で解の存在を検証する。

$Fu = (-\Delta^{-1})u^2$ と置くと、Emden方程式は $Fu = u$ となる。これをさらに変形し

$$Tu = (I - P_h)Fu + N_h u,$$

$$N_h u = P_h u - [P_h(F - I)'(u_h)]^{-1} P_h(Fu - u)$$

とすると $Fu = u$ と $Tu = u$ は同値となる。実際

$$Tu = u \Leftrightarrow (I - P_h)Fu = (I - P_h)u, \quad N_h u = P_h u$$

$$\Leftrightarrow (I - P_h)Fu = (I - P_h)u, \quad P_h Fu = P_h u \Leftrightarrow Fu = u$$

となる。

ここで、 N_h はNewton作用素と言われ、有限次元部分の収束性を改善する役割を果たしている。

Shaudarの不動点定理により解の存在が検証されるためには

$$N_h u \in u_h + U_h, \quad (I - P_h)Fu \in U_*$$

が成り立てばよい。

ここでは後者(無限次元部分)について説明する。

$$u = u_h + \hat{u}_h + u_*,$$

$$\hat{u}_h \in U_h = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \in S_h \mid c_k \in [-\beta, \beta] \right\}$$

$$u_* \in U_* = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \mid P_h u = 0, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \alpha \right\}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \|(I - P_h)Fu\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|(I - P_h)(-\Delta)^{-1}u^2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\max} \|u^2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 3C_{\max} \left(\|u_h^2\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{u}_h^2\|_{L^2(\Omega)} + \|u_*^2\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

となるが、 $\|\hat{u}_h^2\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\beta^2\|_{L^2(\Omega)} = \beta^2 |\Omega|^{1/2},$

$$\begin{aligned} \|u_*^2\|_{L^2(\Omega)} &\leq |\Omega|^{1/8} \left(\frac{5}{\pi}\right)^{5/4} 4^{-1/8} \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^{5/8} C_{\max}^{5/8} \|u_*\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq |\Omega|^{1/8} \left(\frac{5}{\pi}\right)^{5/4} 4^{-1/8} \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^{5/8} \alpha^2 C_{\max}^{5/8} \quad \text{より,} \end{aligned}$$

$$3C_{\max} \left(\|u_h^2\|_{L^2(\Omega)} + \beta^2 |\Omega|^{1/2} + |\Omega|^{1/8} \left(\frac{5}{\pi}\right)^{5/4} 4^{-1/8} \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^{5/8} \alpha^2 C_{\max}^{5/8} \right) \leq \alpha$$

が成り立てば、解の存在が証明できたことになる。

メッシュ分割を細かくすれば C_{\max} は小さくなり、検証が成功する。

補間誤差定数をどのようにして求めるか

T を三角形領域とし、関数空間 $V^{1,1}$, $V^{1,2}$, V^2 を以下のように定める:

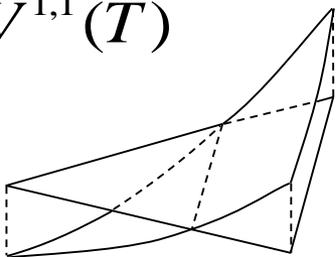
$$V^{1,1}(T) = \left\{ \varphi \in H^1(T) \mid \int_T \varphi \, dx dy = 0 \right\}$$

$$V^{1,2}(T) = \left\{ \varphi \in H^1(T) \mid \int_{\gamma_k} \varphi \, ds = 0, \, k = 1, 2, 3 \right\}$$

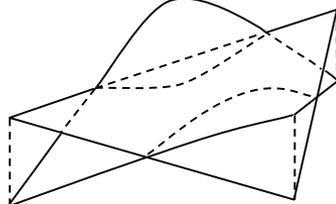
$$V^2(T) = \left\{ \varphi \in H^2(T) \mid \varphi(p_k) = 0, \, k = 1, 2, 3 \right\}$$

ここで p_k は T の頂点を、 γ_k は T の頂点を表す。

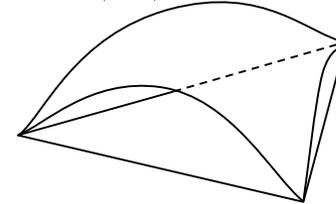
$V^{1,1}(T)$



$V^{1,2}(T)$



$V^2(T)$



このとき、以下の定数が存在する:

$$C_1(T) = \sup_{\varphi \in V^{1,1}(T), \varphi \neq 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(T)}}$$

$$C_2(T) = \sup_{\varphi \in V^{1,2}(T), \varphi \neq 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(T)}}$$

$$C_3(T) = \sup_{\varphi \in V^2(T), \varphi \neq 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{|\varphi|_{H^2(T)}}$$

$$C_4(T) = \sup_{\varphi \in V^2(T), \varphi \neq 0} \frac{\|\nabla \varphi\|_{L^2(T)}}{|\varphi|_{H^2(T)}}$$

ただし

$$|u|_{H^2}^2 \equiv \|u_{xx}\|_{L^2}^2 + 2\|u_{xy}\|_{L^2}^2 + \|u_{yy}\|_{L^2}^2$$

である。

これらの定数は、有限要素解の事前誤差評価や事後誤差評価だけでなく、一般の近似理論や補間誤差解析などへの応用上も重要である。

補間誤差解析への応用

$\text{Pol}(n)$ を n 次以下の二変数多項式全体の集合とする。

応用例 1: P_0 補間

$u \in H^1(T)$ に対して u の P_0 補間 $\Pi^{(P_0)}u$ を

$$\int_T \Pi^{(P_0)}u \, ds = \int_T u \, ds, \quad \Pi^{(P_0)}u \in \text{Pol}(0)$$

と定める。このとき

$$\|u - \Pi^{(P_0)}u\|_{L^2(T)} \leq C_1(T) \|\nabla u\|_{L^2(T)}$$

が成り立つ。

応用例 2: P_1 補間

$u \in H^2(T)$ に対して u の P_1 補間 $\Pi^{(P_1)}u$ を

$$\Pi^{(P_1)}u(p_k) = u(p_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad \Pi^{(P_1)}u \in \text{Pol}(1)$$

と定める。このとき

$$\begin{aligned} \|u - \Pi^{(P_1)}u\|_{L^2(T)} &\leq C_3(T) |u|_{H^2(T)} \\ \|\nabla(u - \Pi^{(P_1)}u)\|_{L^2(T)} &\leq C_4(T) |u|_{H^2(T)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

応用例 3: 非適合補間

$C_2(T)$ の値はいくつかの種類
の非適合補間の誤差評価に
応用することができる。

例えば、 $u \in H^2(T)$ に対して
Crouzeix and Raviart 型の
非適合補間 $\Pi^{(CR)}u$ を以下
のように定める。

$$\int_{\gamma_k} \Pi^{(CR)}u \, ds = \int_{\gamma_k} u \, ds, \quad k = 1, 2, 3, \quad \Pi^{(CR)}u \in \text{Pol}(1)$$

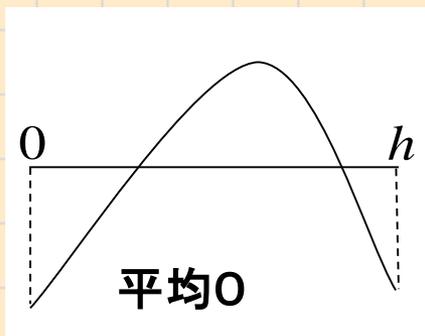
このとき、

$$\|u - \Pi^{(CR)}u\|_{L^2(T)} \leq C_1(T)C_2(T)|u|_{H^2(T)}$$

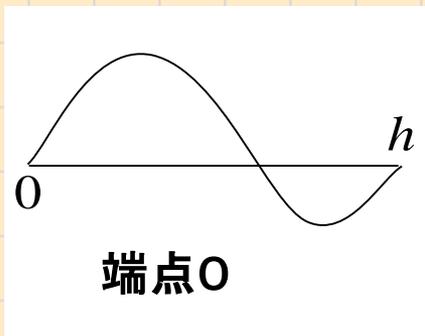
が成り立つ。

一次元の場合

領域が一次元の場合には、三角関数で展開することによって以下の定数が求まる。



$$\sup_{\int_0^h \varphi dx=0, \varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\int_0^h \varphi^2 dx}}{\sqrt{\int_0^h (\varphi')^2 dx}} = \frac{h}{\pi}$$



$$\sup_{\varphi(0)=\varphi(h)=0, \varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\int_0^h \varphi^2 dx}}{\sqrt{\int_0^h (\varphi'')^2 dx}} = \frac{h^2}{\pi^2}$$



$$\sup_{\varphi(0)=\varphi(h)=0, \varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\int_0^h (\varphi')^2 dx}}{\sqrt{\int_0^h (\varphi'')^2 dx}} = \frac{h}{\pi}$$

しかし、三角形領域については定数は簡単には求まらない。
四面体領域の場合は更に難しい(だろう)。

既存の結果

Arcangeli and Gout(1976) は

$$C_4(T) \leq \frac{3d(T)^2}{\rho(T)}$$

を示した。ここで $d(T)$ は T の直径を表し、 $\rho(T)$ は T の内接円の直径を表す。この評価は実際の値に比べるとかなり大きい。

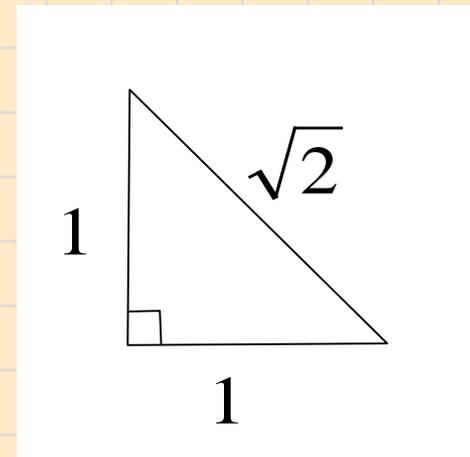
Meinguet and Descloux(1977) は上記の結果を改良し、

$$C_4(T) \leq \frac{1.21d(T)^2}{\rho(T)}$$

を得た。しかし依然としてこの評価はかなりの過大評価である。

T が、三辺の長さが $1, 1, \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形のとき
(以後、この三角形を単位三角形と呼ぶ)、Liu and Kikuchi
(2007) は以下の評価を得た:

$$C_4(T_{unit}) < 0.49293.$$



Nattererの公式

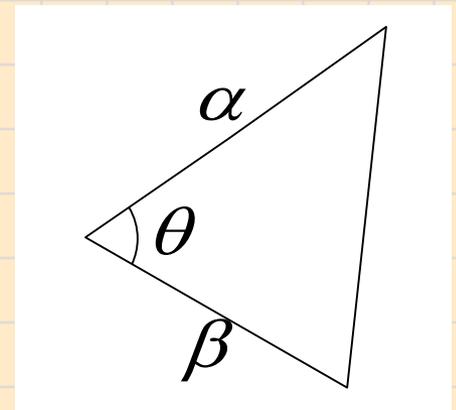
単位三角形の場合の結果にアフィン変換を適用することで、一般の三角形に対する $C_j(T)$ の上界を求めることができる。

Natterer (1975) は、アフィン変換を用いて、 $C_4(T)$ に対する以下の公式を得た:

$$C_4(T) \leq C_4(T_{unit}) \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}}{\sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4})}}$$

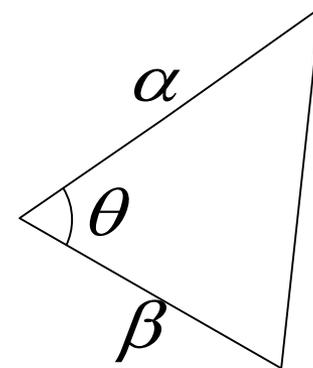
ここで、 α と β は一番短い辺と二番目に短い辺の長さである。

同様の公式は、 $C_1(T), C_2(T), C_3(T)$ に対しても構築することができる。



Nattererの公式に Liu and Kikuchi の結果を
合わせると、

$$C_4(T) < 0.49293 \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}}{\sqrt{2\left(\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}\right)}}$$



を得る。しかし、この公式は効率的とはいえない。

例えば、 β と θ を固定して、 $\alpha \rightarrow 0$ とすると、 $C_4(T)$ は一定値に収束することが知られている (Babuska & Aziz (1976)) が、上式の右辺は無限大に発散する。

また、 T が一辺の長さが 1 の正三角形の場合には、上の公式は 1.045662... を与えるが、数値計算から $C_4(T)$ の大きさはおよそ 0.318401 だと予想されている。

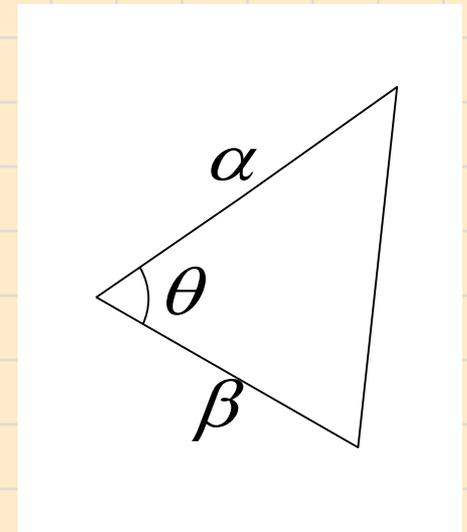
Formula obtained by Liu and Kikuchi

Liu and Kikuchi (2010) は以下の公式を得た:

$$C_4(T) < 0.49293 \cdot \frac{1 + |\cos \theta|}{\sin \theta} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta + \beta^4}}{2}}$$

この公式は、ほとんど全ての三角形に対して、Nattererの公式より良い結果を与える。特に、この公式では、 β と θ を固定して $\alpha \rightarrow 0$ としても、値が無限大に発散しない。

しかし、 $\alpha = \beta$ が成り立つときには、この公式はNattererの公式と同じ値になるので、例えば正三角形については、Nattererの公式と同じく、あまり良い値にはならない。



その他の既存の結果

Payne and Weinberger(1960) は $C_1(T) \leq \frac{d(T)}{\pi}$ を示した。

この結果は Laugesen and Siudeja(2010) により

$C_1(T) \leq \frac{d(T)}{j_{1,1}}$ と改良された。

ここで、 $j_{1,1} = 3.83170597 \dots$ は Bessel 関数 $J_1(x)$ の一つ目の正の零点である。

Kikuchi and Liu(2007) は以下を示した:

$$C_1(T_{unit}) = \frac{1}{\pi}, \quad C_1(T) \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{1 + |\cos \theta|} \max(\alpha, \beta)$$

Liu and Kikuchi(2010) さらに

$$C_2(T) < 0.34856\sqrt{1 + |\cos \theta|} \max(\alpha, \beta)$$

を示した。また、Arcangeli and Gout(1976) は以下を得た:

$$C_3(T) \leq 3d(T)^2 .$$

補間誤差定数に対する主結果

我々は以下の公式を提案し、証明した:

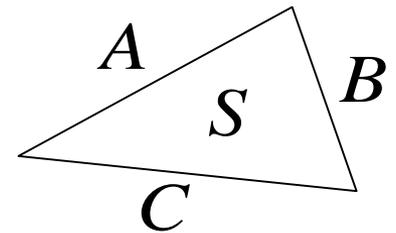
$$C_1(T) < K_1(T) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{28} - \frac{S^4}{A^2 B^2 C^2}}$$

$$C_2(T) < K_2(T) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{54} - \frac{S^4}{2A^2 B^2 C^2}}$$

$$C_3(T) < K_3(T) = \sqrt{\frac{A^2 B^2 + B^2 C^2 + C^2 A^2}{83} - \frac{1}{24} \left(\frac{A^2 B^2 C^2}{A^2 + B^2 + C^2} + S^2 \right)}$$

$$C_4(T) < K_4(T) = \sqrt{\frac{A^2 B^2 C^2}{16S^2} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{30} - \frac{S^2}{5} \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} \right)}$$

ここで A, B, C は三角形の三辺の長さ、
 S は三角形の面積である。



座標設定

我々の公式にはスケール不変性があるので、

$$p_1 = (0,0), p_2 = (1,0), p_3 = (a,b).$$

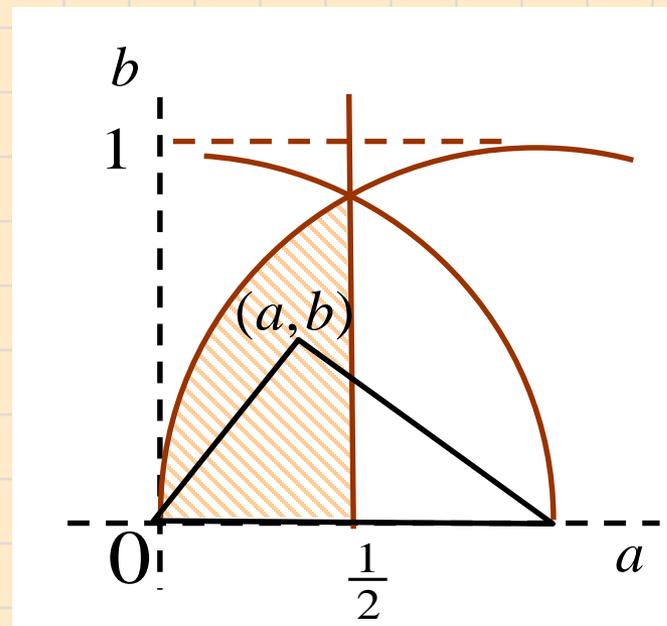
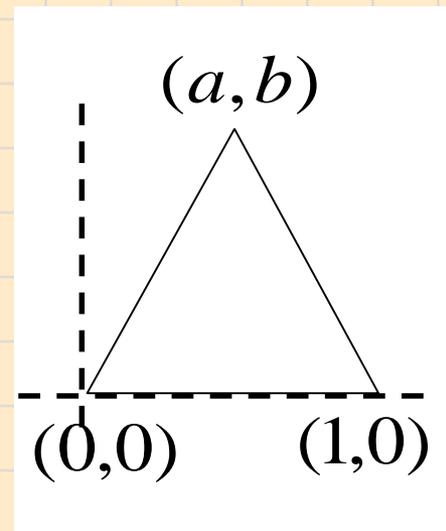
と仮定してよい。さらに、辺の長さの関係として

$$p_1p_3 \leq p_2p_3 \leq p_1p_2.$$

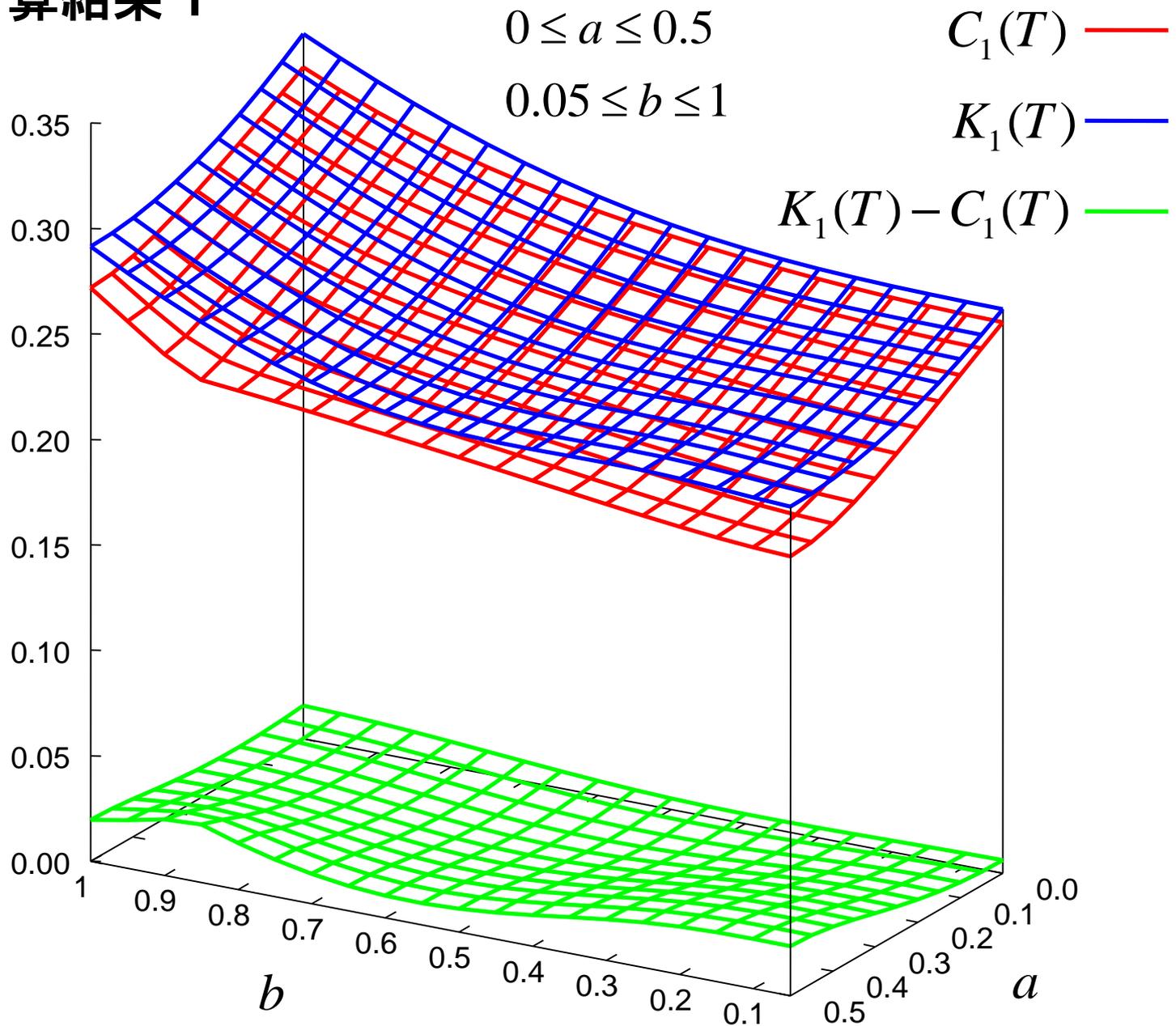
を仮定することができる。よって、 (a,b) は

$$(a,b) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, 1\right]$$

の範囲で考えればよい。



数值計算結果 1



数值計算結果 2

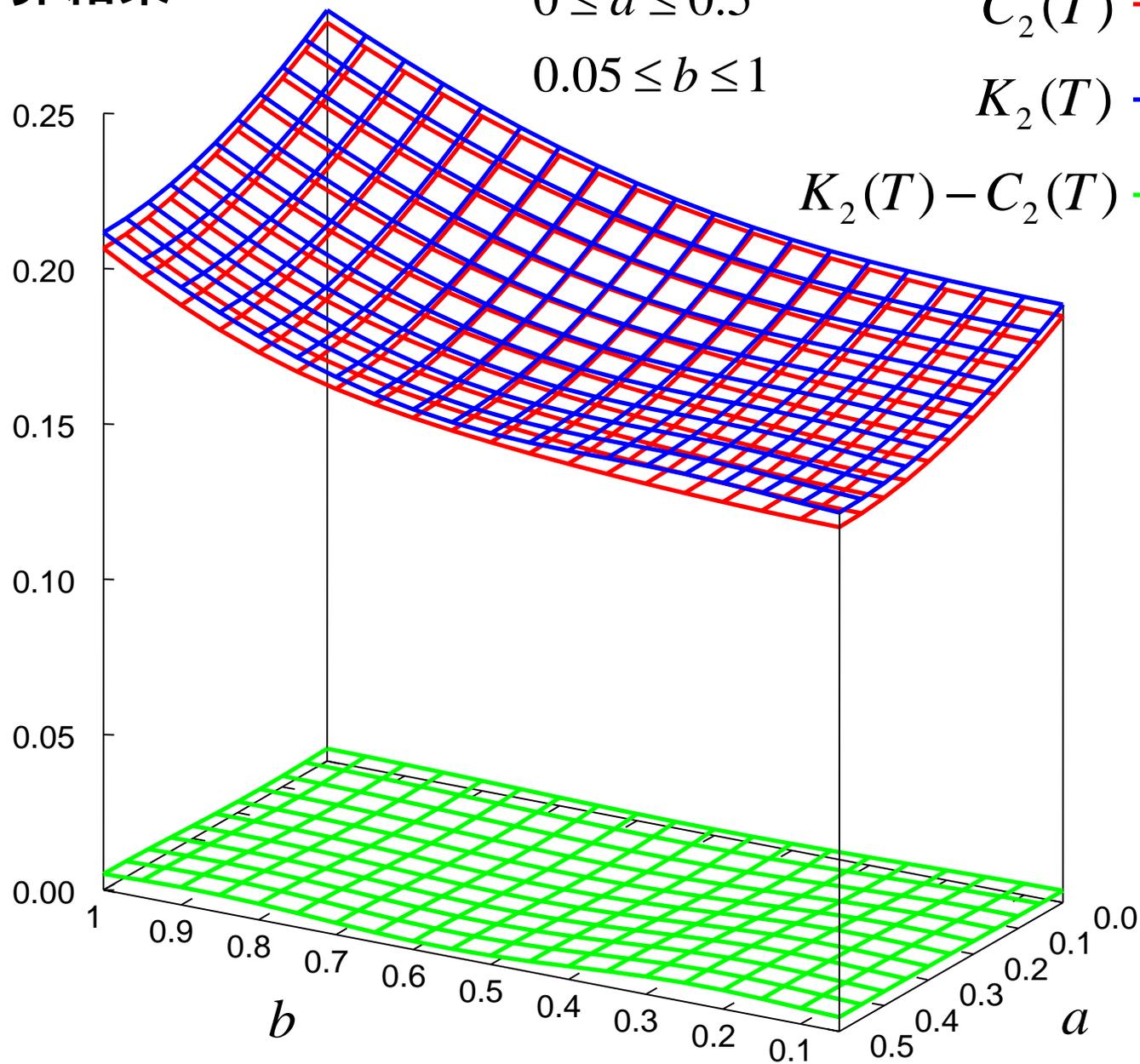
$$0 \leq a \leq 0.5$$

$$0.05 \leq b \leq 1$$

$$C_2(T) \text{ --- (red line)}$$

$$K_2(T) \text{ --- (blue line)}$$

$$K_2(T) - C_2(T) \text{ --- (green line)}$$



数值計算結果 3

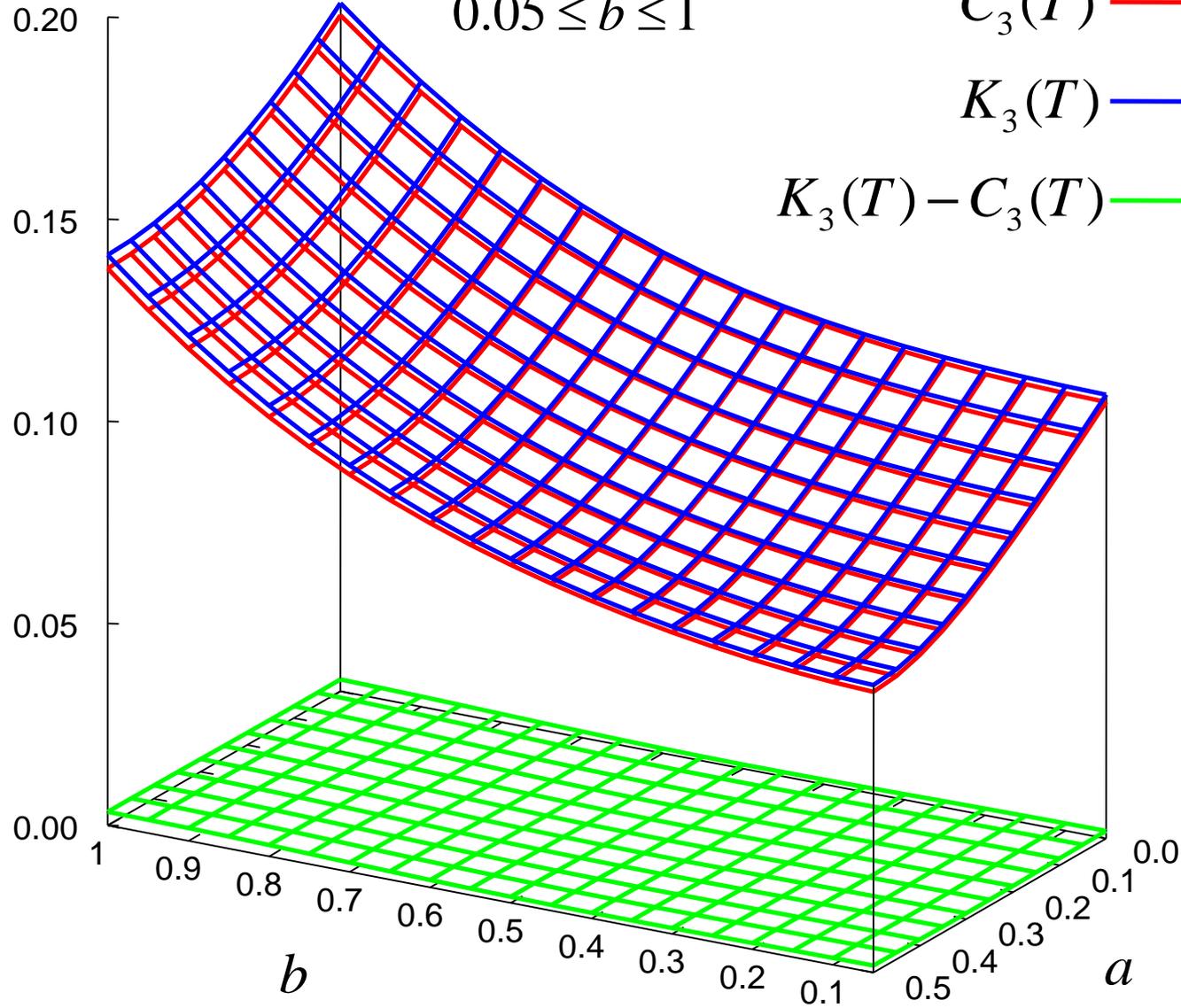
$$0 \leq a \leq 0.5$$

$$0.05 \leq b \leq 1$$

$$C_3(T) \text{ --- } \text{red line}$$

$$K_3(T) \text{ --- } \text{blue line}$$

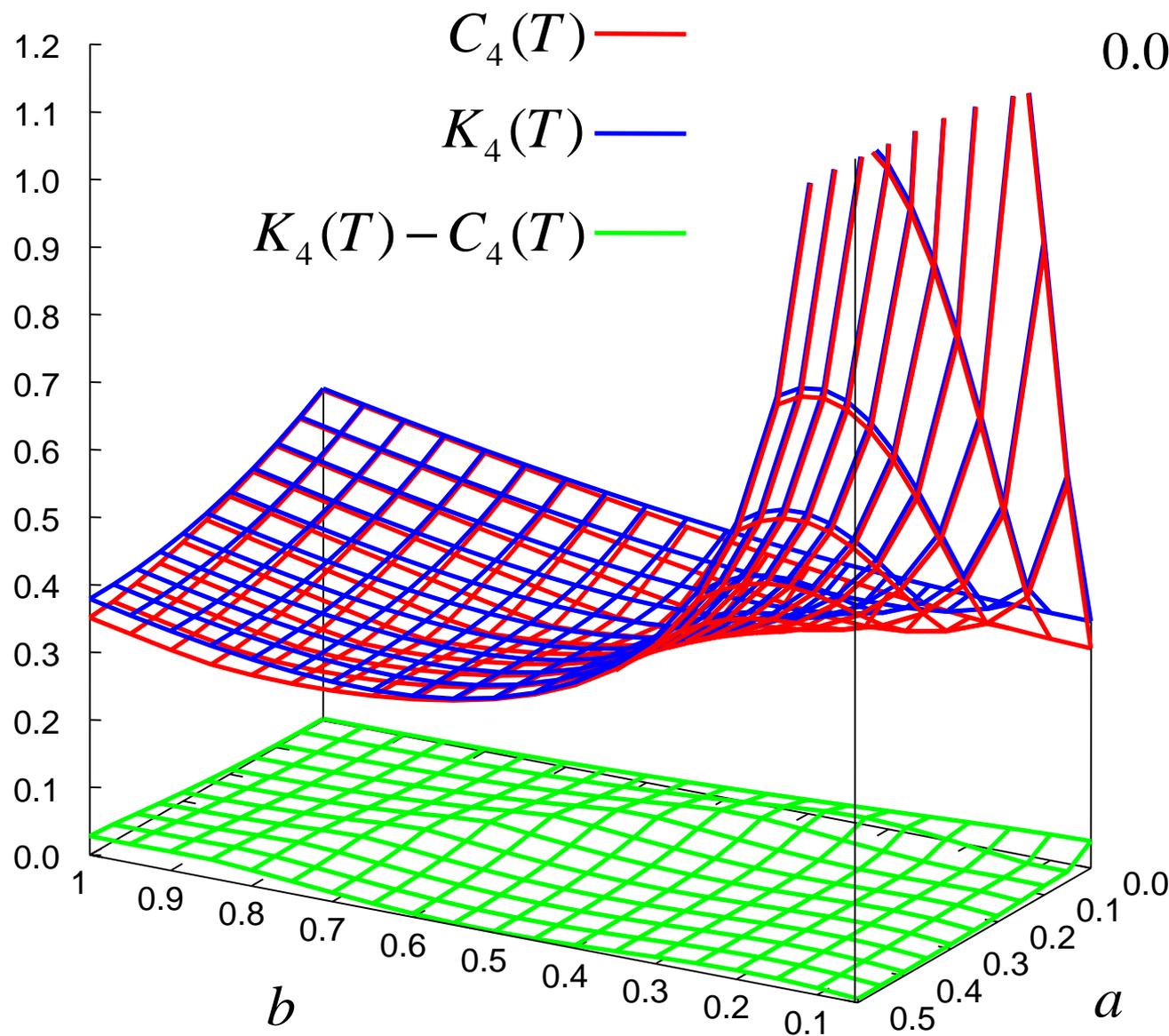
$$K_3(T) - C_3(T) \text{ --- } \text{green line}$$



数值計算結果 4

$$0 \leq a \leq 0.5$$

$$0.05 \leq b \leq 1$$



外接半径条件

三角形の外接円の半径は、3辺の長さと言積を用いて

$$R_T = \frac{ABC}{4S}$$

と書ける。よって、以下の評価が成り立つ:

$$K_T = \sqrt{\frac{A^2 B^2 C^2}{16S^2} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{30} - \frac{S^2}{5} \left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} \right)}$$

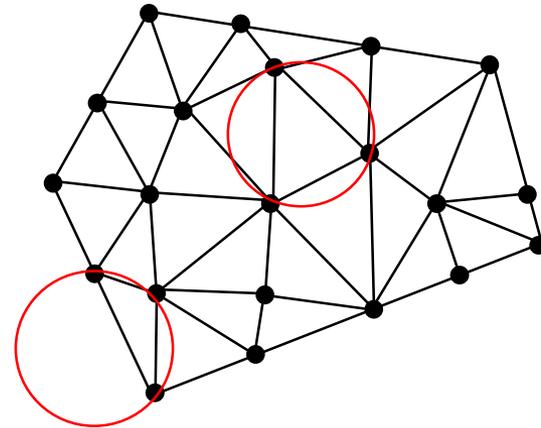
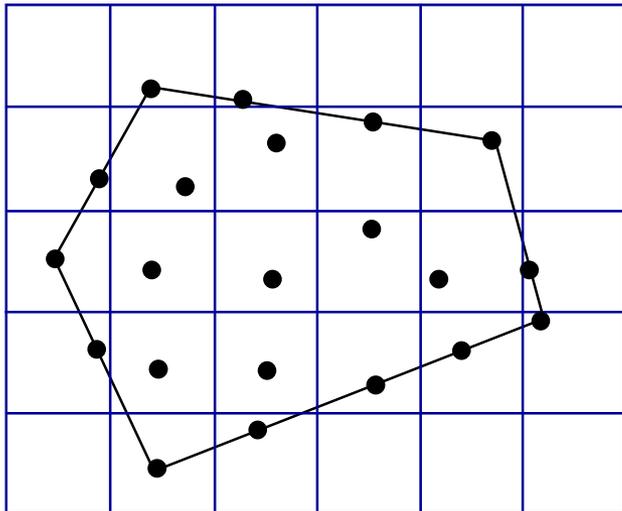
$$\|\nabla(u - \Pi u)\|_{L^2(T)} \leq K_T |u|_{H^2(T)} \leq R_T |u|_{H^2(T)}$$

このように、補間誤差定数が外接円の半径の定数倍で押さえられるという条件を、外接半径条件と呼ぶことにする。ここで、 R_T の前にかかる定数は 1 より小さくすることはできない。

ドロネー分割への応用

三角形分割する際にドロネー分割を用いると、外接半径条件から補間誤差の上界を見積もることが可能になる。

ただし、境界上で潰れた三角形が発生しないように何らかの条件をつける必要がある。



誤差評価の一般化

外接半径条件

$$\|\nabla(u - \Pi u)\|_{L^2(T)} \leq R_T |u|_{H^2(T)}$$

の発見をきっかけとして、誤差評価において三角形や四面体の外接円の半径が重要な役割を担っているということが明らかになってきた。

次ページ以降で、さらに一般化した誤差評価について説明する。

Lagrange補間

K を三角形とし、閉集合として考える。 K の重心座標(体積座標)を

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$$

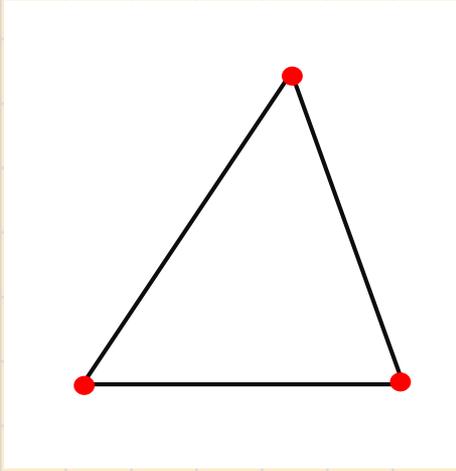
とし、整数 $k \geq 1$ に対して点集合 $\Sigma^k(K)$ を

$$\Sigma^k(K) = \left\{ \left(\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k} \right) \mid 0 \leq a_i \leq k, \sum_{i=1}^3 a_i = k \right\}$$

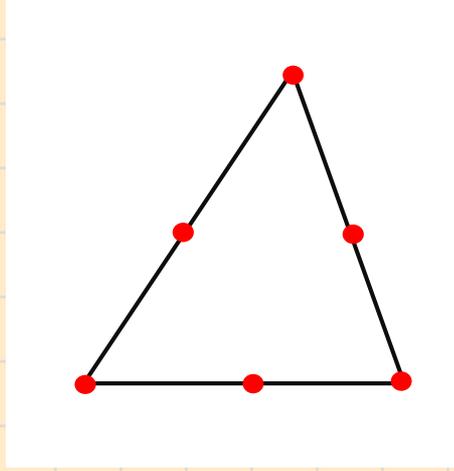
と定義する。

四面体についても同様に点集合を定義する。

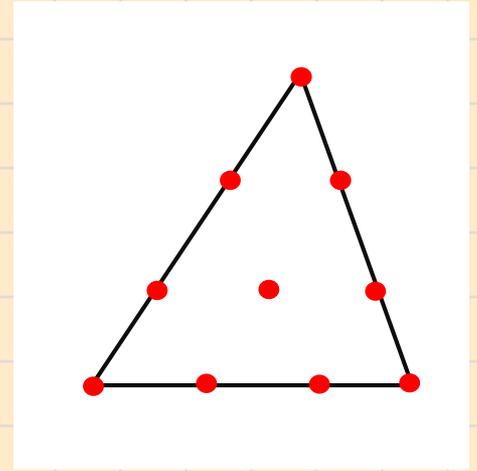
点集合



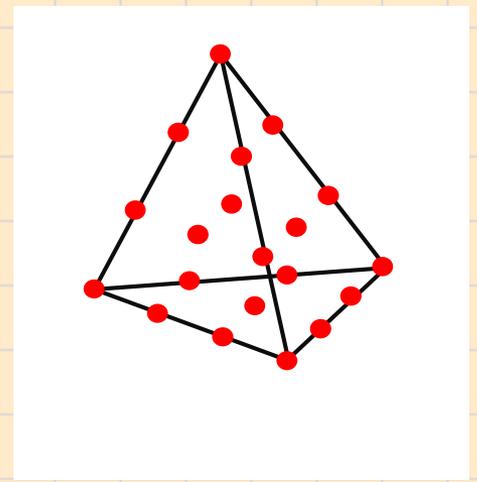
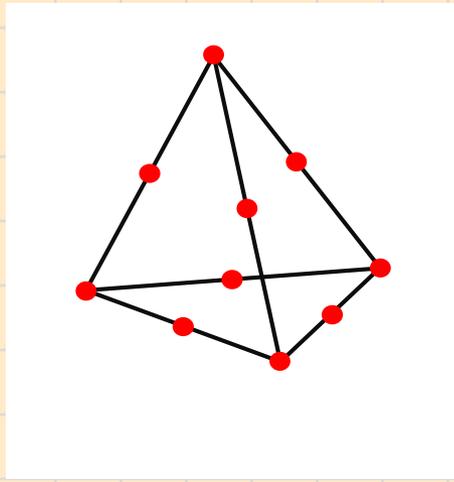
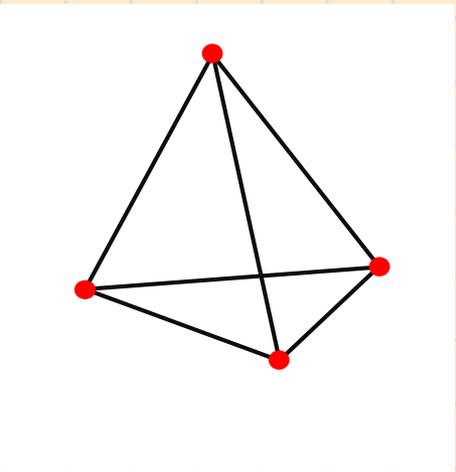
$$k = 1$$



$$k = 2$$



$$k = 3$$



補間誤差

与えられた連続関数 v に対して $\Sigma^k(K)$ のすべての点で v と一致する高々 k 次の多項式 $\Pi_K^k v$ がただ一つ定まる。この $\Pi_K^k v$ を v の k 次Lagrange補間という。

本講演では、補間誤差

$$\left| v - \Pi_K^v v \right|_{m,p,K} \quad \left(= \left| v - \Pi_K^v v \right|_{W^{m,p}(K)} \right)$$

の上界について考える。

先行研究1

しばらく K は**三角形もしくは四面体**とする。また、 $h_K = \text{diam}(K)$ を K の直径(最大辺の長さ)、 ρ_K を内接円(球)の直径とする。

正則性条件

$\sigma > 0$ を定数とする。 $h_K/\rho_K \leq \sigma$ が成り立つとき、 σ のみに依存する定数 $C = C(\sigma)$ が存在して

$$\left| v - \Pi_K^1 v \right|_{1,2,K} \leq Ch_K |v|_{2,2,K}, \quad \forall v \in H^2(K)$$

が成り立つ。

CiarletやBrenner and Scottなど、多くの教科書に載っている。

先行研究2

最大角条件

$\alpha < \pi$ を定数とする。**三角形** K のすべての角の大きさが α 以下のとき、 α のみに依存する定数 $C = C(\alpha)$ が存在して

$$\left| v - \Pi_K^1 v \right|_{1,2,K} \leq Ch_K |v|_{2,2,K}, \quad \forall v \in H^2(K)$$

が成り立つ。

Babuška and Aziz(1976)、Jamet(1976) など。

最大角条件は、Křížek(1992)により K が四面体の場合に拡張されている。この場合、各面を構成する三角形の角の大きさだけでなく、面と面が成すすべての対面角の大きさが定数以下であることが要求される。

三角形に対する我々の結果

外接半径条件

$1 \leq p \leq \infty$ とし、 k, m を $k \geq 1$ かつ $0 \leq m \leq k$ なる整数とする。このとき、**三角形** K 上の k 次Lagrange補間について以下の誤差評価が成り立つ。

$$\left| v - \Pi_K^k v \right|_{m,p,K} \leq C R_K^m h_K^{k+1-2m} |v|_{k+1,p,K}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

ここで、 $C = C(k, m, p)$ は k, m, p のみに依存する定数であり、 R_K は K の外接円の半径(外接半径)である。

Kobayashi and Tsuchiya(2015, 2016)

外接半径条件は、正則性条件や最大角条件のように三角形の形状に制限がなく、任意の形状に適用可能である。

射影外接半径1

今までの研究においては、四面体の形状にかかわらず成り立つような誤差評価は知られていなかった。

それに対し我々は、射影外接半径という幾何学的な量を導入することにより、そのような誤差評価を得ることができた。

射影外接半径2

四面体 K について、一つの面を選び B とする。 B の外接半径を R_B 、直径を h_B とする。

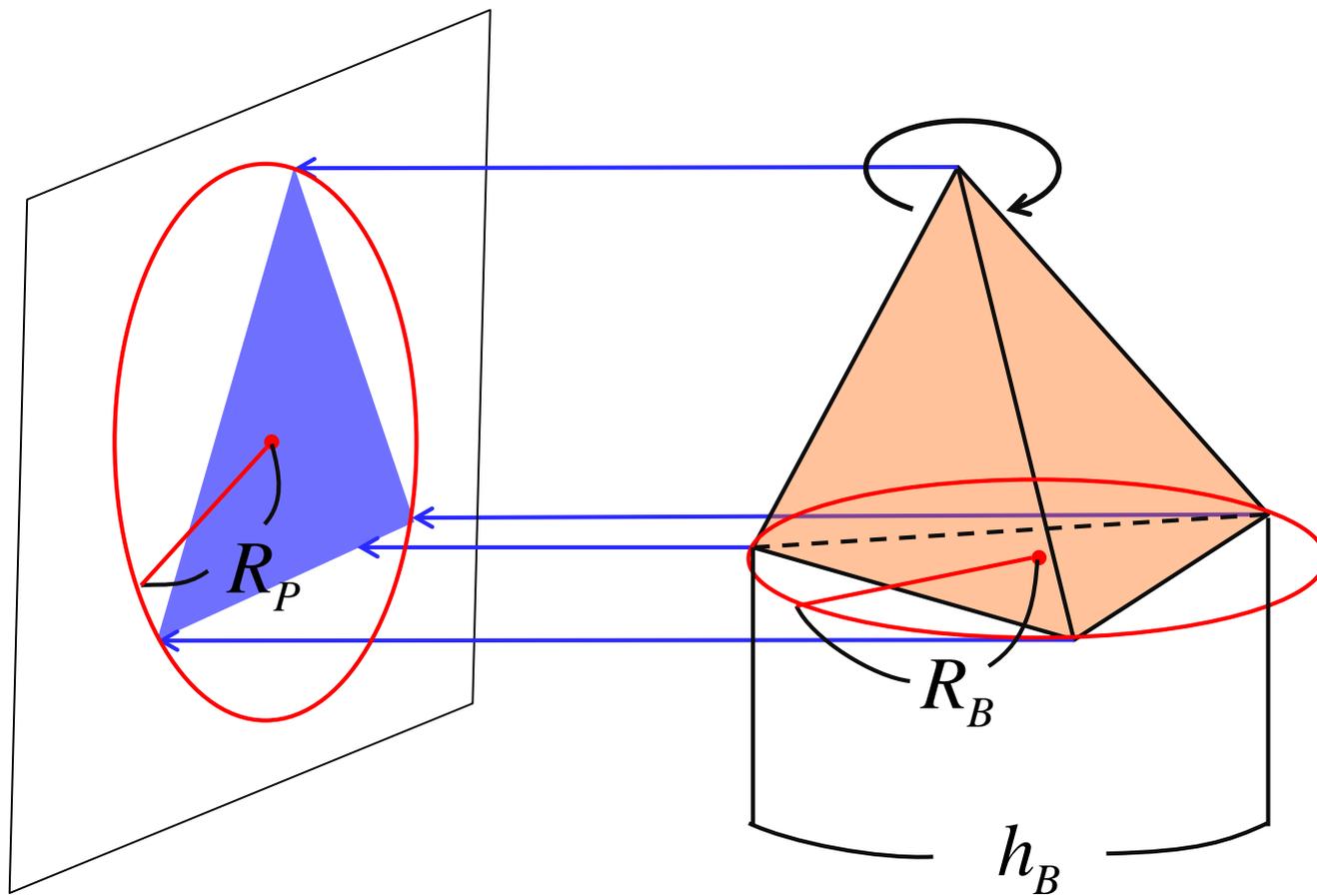
K を B に垂直な面に射影したとき、射影された三角形の形状は射影する方向によって変わってくるが、あらゆる方向の射影を考えたときの射影三角形の外接半径の最大値を R_P として、 K の射影外接半径を

$$R_K = \min_B \frac{R_B R_P}{h_B}$$

により定義する。 B は任意なので、一番小さくなるように選ぶ。

射影外接半径3

$$R_K = \min_B \frac{R_B R_P}{h_B}$$



主結果

k, m を $k \geq 1$ かつ $0 \leq m \leq k$ なる整数とする。また、 p は

$$\begin{cases} 2 < p \leq \infty & (k = m) \\ \frac{3}{2} < p \leq \infty & (k = 1, m = 0) \\ 1 \leq p \leq \infty & (k \geq 2, k - m \geq 1) \end{cases}$$

を満たすとする。このとき、**四面体** K 上の k 次Lagrange補間について以下の誤差評価が成り立つ。

$$\left| v - \Pi_K^k v \right|_{m,p,K} \leq C R_K^m h_K^{k+1-2m} |v|_{k+1,p,K}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

ここで、 $C = C(k, m, p)$ は k, m, p のみに依存する定数である。

特定の場合

誤差評価式

$$\left| v - \Pi_K^k v \right|_{m,p,K} \leq CR_K^m h_K^{k+1-2m} |v|_{k+1,p,K}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

の有限要素法への応用を考えると、 $p = 2$ の場合が特に重要である。この場合、 $0 \leq m < k$ でなければならないので、 $m = k = 1$ つまり、一次要素の場合には適用できない。これは本質的であって改善できない(後述)。しかし、射影外接半径を用いない別のタイプの誤差評価は可能だろう。

2次要素を用いる場合は、 $m = 1, k = 2$ のとき、

$$\left| v - \Pi_K^2 v \right|_{1,2,K} \leq CR_K h_K |v|_{3,2,K}, \quad \forall v \in W^{3,2}(K)$$

なる誤差評価が得られる。

証明の概略

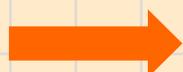
参照四面体を変形していき、定数がどう変化するか解析していく。

Squeezing Theorem

差分商による計算

特異値計算

参照三角形

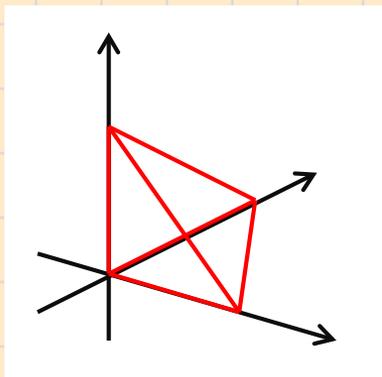


軸に沿って変形



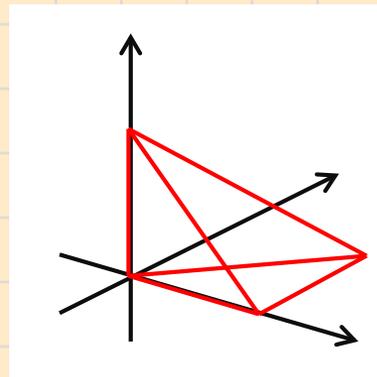
最終形に変形

参照三角形は以下の2種類を考える。



頂点

$(0,0,0), (1,0,0)$
 $(0,1,0), (0,0,1)$



頂点

$(0,0,0), (1,0,0)$
 $(1,1,0), (0,0,1)$

Squeezing Theorem

参照四面体を \hat{K} とし、 $C_{k,m,p}$ を

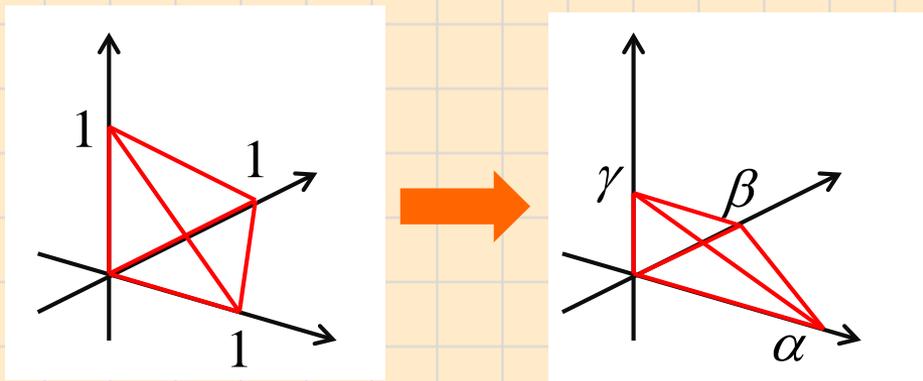
$$\left| v - \prod_{\hat{K}}^k v \right|_{m,p,\hat{K}} \leq C_{k,m,p} |v|_{k+1,p,\hat{K}}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\hat{K})$$

が成り立つような定数とすると、

$$\sup_{v \in W^{k+1,p}(K)} \frac{|v|_{k+1,p,K}}{\left| v - \prod_K^k v \right|_{m,p,K}} \leq \max(\alpha, \beta, \gamma)^{k+1-m} C_{k,m,p}$$

が成り立つ。ただし、

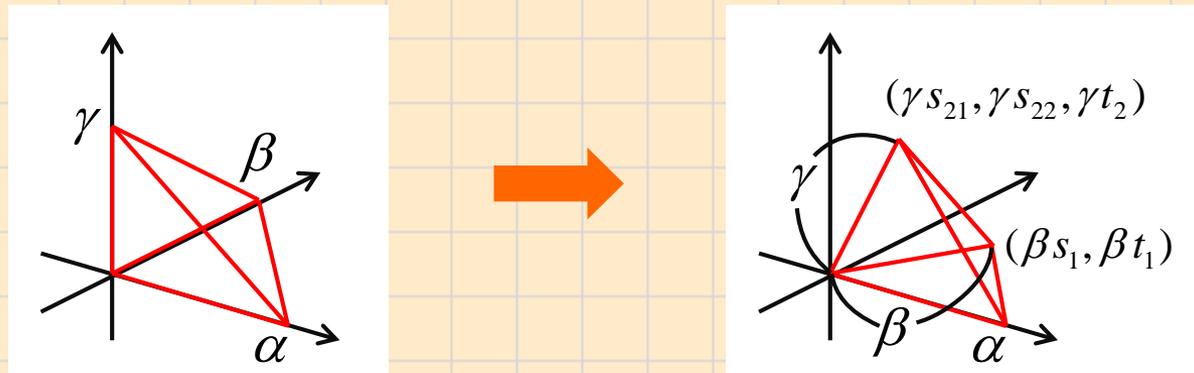
$$\begin{cases} 2 < p \leq \infty & (k = m) \\ \frac{3}{2} < p \leq \infty & (k = 1, m = 0) \\ 1 \leq p \leq \infty & (k \geq 2, k - m \geq 1) \end{cases}$$



が必要。証明は差分商を用いることで見通しが良くなる。

特異値計算

Squeezing された四面体をさらに変形する。



特異値計算により

$$\sup_{v \in W^{k+1,p}(K)} \frac{|v|_{k+1,p,K}}{\left| v - \prod_K^k v \right|_{m,p,K}} \leq \frac{\max(\alpha, \beta, \gamma)^{k+1-m}}{\{(1-s_1)(1-s_2)\}^{m/2}} C_{k,m,p}$$

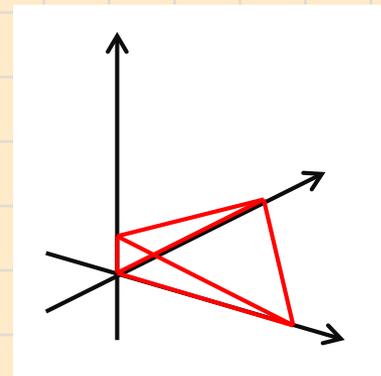
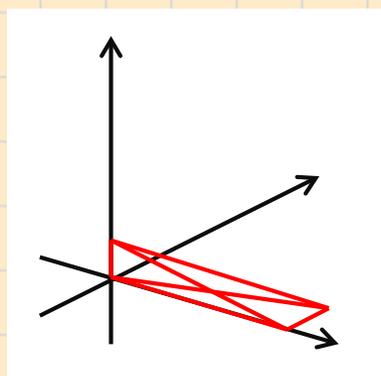
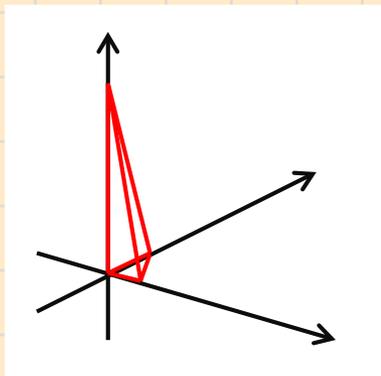
が成り立つことが示される。ここで、 $s_2 = \sqrt{s_{21}^2 + s_{22}^2}$ である。

これを幾何学的に解釈することで、以下の評価式が得られる。

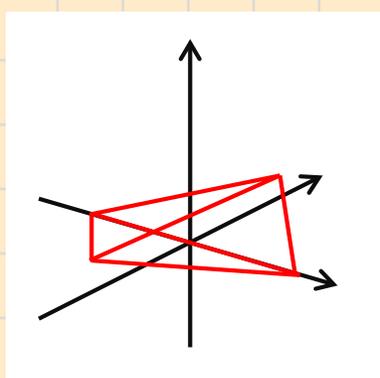
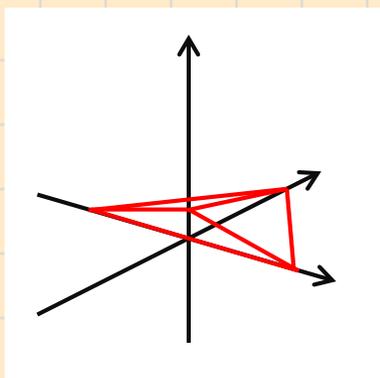
$$\left| v - \prod_K^k v \right|_{m,p,K} \leq CR_K^m h_K^{k+1-2m} |v|_{k+1,p,K}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(K)$$

四面体の例

射影外接半径が大きくなる潰れ方



射影外接半径が大きくなる潰れ方



まとめ

- 三角形および四面体上の補間誤差解析とその有限要素法への応用について解説した。
- 三角形については $p = 2$ の場合に、補間誤差定数を非常によく近似できる公式を得ている。
- 三角形および四面体については、一般の p について成り立つ誤差評価が得られている。

ご清聴、どうもありがとうございました。