

# 卒業論文概要書

2010年2月提出

学 科 名	情報・ネットワーク	氏名	久保田 昌宏	指 導 教 員	大石 進一 印
		学籍番号	1G06R066-5 <sup>CD</sup>		
研 究 題 目	非線形方程式の精度保証法の研究				

## 1 はじめに

映画「博士の愛した数式」を鑑賞した際にオイラーの公式の不思議さを劇中で説明していて自分も共感し、また不思議に思った。その不思議さは自然対数の底と円周率と虚数が含まれているものにたった1を加えるだけで0になっていしまうという美しさ。式に表すと

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

この事実は私の中でかなりの衝撃を与えてくれました。このことから、本論文は円周率の近似解を求める方法は多く知られているがオイラーの公式から得られた円周率がどれくらい正しいのかを数学的に正しく検算するための精度保証付き数値計算法を研究していく。

## 2 非線形方程式の解法とその収束条件

### 2.1 ニュートン法

非線形方程式の解法の一つである。

$$x_{n+1} = x_n - g'(x_n)^{-1}g(x_n)$$

によって逐次的に解を改良していく方法のことである。初期値  $x_0$  を与えてやり、上記の漸化式を解いていく。 $x_{n+2}$ 、 $x_{n+3}$  と反復することにより  $g(x) = 0$  の解へ収束する。本論文では、 $g(x) = e^{ix} + 1$  として考えてニュートン法を使って近似解を求めていく。初期値は  $x_0 = 3.1415$  で始めてみる。

### 2.2 Kantrovich の定理

非線形方程式の解法の一つであるニュートン法によって近似解が求まるが、ニュートン法は逐次的に解を改良していくので適切な解に収束しない場合がある。では、どのような時に収束するのかということを考えると Kantrovich の定理を考慮し、ある条件を満たすならば、非線形方程式の一意な解が存在し、その解に収束することが保証される。また、Kantrovich の定理から収束した近似解と真の解の誤差評価を導き出せる。

## 3 数値計算

INTLAB を用いて、非線形方程式をニュートン法で解き、またその近似解が収束するのかを判断する Kantrovich の定理も INTLAB で計算し、近似解と真の解の誤差評価を求める。ちなみに INTLAB とは MATLAB 上での区間演算用の TOOLBOX であり、実数および複素数上での区間演算を浮動小数点の丸めモードを制御しながらできる。自動微分や勾配、多項式のための精度保証付きの入出力ライブラリの機能も備わっている。

## 4 ニュートン法の初期値問題

非線形方程式の解を求めるためのニュートン法は、初期値が真の解に近くないと収束することが保証されない。そのため初期値が真の解から離れていると、真の解の近似解に収束しないことが多いのでどれくらい初期値が真の解から離れていると収束しないのかを実験する。

## 5 まとめと今後の課題

本論文ではオイラーの公式からニュートン法により円周率、さらにその近似解と真の解の誤差評価を INTLAB に よって導き出した。そして、ニュートン法で解が収束する初期値の区間を求めた。しかし、ニュートン法の初期値の問題では手動的に初期値を与えて解が収束する初期値の区間を求めたので効率が悪すぎた。非線形方程式の解をニュートン法で解く際にどんな初期値を取ればよいかを自動的に与える方法としてホモトピー法という方法がある。したがって、今後の課題としてホモトピー法を学んでいくことが課題となってくる。

## 参考文献

[1] 大石進一: 精度保証付き数値計算, コロナ社 (2000).