

平成16年度

卒業論文

常微分方程式の境界値問題に対する
有限差分法の誤差評価

平成17年2月2日

指導教授： 山本 哲朗 教授

早稲田大学 理工学部 情報学科

1g99p038-8 河合 将史

目次

1	序論	3
1.1	背景	4
1.2	本論文の目的	5
1.3	本論文の構成	5
2	初期値問題と境界値問題	6
2.1	はじめに	7
2.2	初期値問題	8
2.2.1	初期値問題	8
2.2.2	解の存在と一意性	8
2.3	境界値問題	10
2.3.1	境界値問題	10
2.3.2	解の存在と一意性	10
3	差分法	11
3.1	はじめに	12
3.2	等分割近似を用いた差分法	13
3.2.1	差分近似	13
3.2.2	差分方程式	14
3.2.3	解法	15
3.3	不等分割近似を用いた差分法	17
3.3.1	Shortley-Weller 近似	17

4	数値解の評価	20
4.1	はじめに	21
4.2	評価環境	21
4.3	数値例	22
4.3.1	数値例 1	22
4.3.2	数値例 2	26
5	結論と今後の課題	33
5.1	結論と今後の課題	34
	謝辞	35
	参考文献	37

第 1 章

序論

1.1 背景

我々が住んでいるこの世界において、物理現象や経済現象など様々な現象が、数学的に微分方程式などの方程式に帰着させることができる。そして、それらを解くことによって現象を解析し、それらに適した製品を設計することが多い。数値解析の目的とは、理学・工学、その他においてあらわれる数学的問題を、数値的に解くための適切な手法を提供し、得られる近似解の誤差を調べることである。今回は、その数ある数値解法の中から、有限差分法 (finite difference method:FDM) (以下差分法) についての研究を行った。差分法とは、微分方程式中にあらわれる導関数・偏導関数を、差分商によりおきかえて連立方程式をつくり、それを解いて近似解を求める方法である。差分法は、微分方程式の初期値問題や境界値問題の解を、近似的に解く手法として計算機が登場した当初から利用されており、数値計算の安定性、数値解の誤差評価などに関する多くの研究があるが、それらはまだ十分とは言えず、計算コストがかかりすぎず、かつ、精度の高い方法は現在も模索されている。

1.2 本論文の目的

本論文では、有限差分法において必ずしも均等でない分点を用いる Shortley-Weller 近似において、解曲線の形状に応じて分点を様々に変化させたときの誤差の変化について調べる。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。第2章では常微分方程式の初期値問題・境界値問題についてと、それらにに対する解の存在定理について述べる。第3章では等分割と不等分割による差分法について述べる。第4章では、実際に数値例をいくつかあげ、その数値結果および評価を述べる。そして、第5章で結論と今後の課題を述べる。

第 2 章

初期値問題と境界値問題

2.1 はじめに

ある問題を考えるときに、与えられた条件を満足する解が果たして存在するかどうかということがまず問題になり、また解が存在する場合でも、それがただ1通りに決まるかどうかということも考えなければならない。このことを解の一意性という。そこで、この章ではまず準備として、常微分方程式の問題の中で最も基本的な初期値問題についてと、その解の存在と一意性の理論について取り上げ、その次に境界値問題について取り上げる。

2.2 初期値問題

2.2.1 初期値問題

微分方程式

$$y' = f(x; y) \quad (2.1)$$

の解 $y(x)$ で、初期条件 (initial condition)

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.2)$$

をみたす解を求める問題を、初期値問題 (initial value problem) という。

2.2.2 解の存在と一意性

初期値問題の解の存在と一意性に関して、次の定理が知られている。

定理 2.1 関数 $f(x; y)$ は $|x - x_0| \leq A$, $|y - y_0| \leq B$ において連続で、 $|f(x, y)| \leq M$ かつ Lipschitz 条件

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z| \quad (K \text{ は正の定数})$$

をみたすとする。このとき、初期条件 $y(x_0) = y_0$ をみたす (2.1) の解は少なくとも

$$|x - x_0| \leq r = \min(A, B/M)$$

で存在し、しかもただ 1 つである。

これを Cauchy-Lipschitz (コーシー・リプシッツ) の定理という。そして、(2.1),(2.2) を数値的に解く一般公式は、次のようになる。

$$Y_0 = y_0$$

$$Y_{i+N} = \alpha_0 Y_i + \cdots + \alpha_{N-1} Y_i + h\Phi(x_i, \dots, x_{i+N}, Y_i, \dots, Y_{i+N}; h) \quad (2.3)$$

ただし

$$h = (b - a)/n, \quad x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{N-1} = 1 \quad (\alpha_i \text{は定数})$$

Φ は f のみに依存する関数で、公式により異なる。(2.3) を N 段法といい、 $N = 1$ のときを 1 段法、 $N \geq 2$ のときを多段法という。1 段法の代表例としては、 f の導関数を使用しない Runge-Kutta 法がある。また、多段法としては Adams-Bashforth 法(陽形公式)、Moulton 法(陰形公式) 等がある。この場合、出発値としては Runge-Kutta 法等、1 段法で求めた値を使用する。なお、陰形公式は各ステップで、単独非線形方程式を反復法により解くことになる。これを内部反復いう。内部反復の初期値(予測子)としては、陽形公式により得られた値を用いる(予測子修正子法の原理)。

2.3 境界値問題

2.3.1 境界値問題

微分方程式

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b \quad (2.4)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (2.5)$$

をみたす解を求める問題を、2点境界値問題 (boundary value problem) という。また、(2.5) のことを境界条件 (boundary condition) というが、境界条件には様々な種類があり

1. $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ 第1種境界条件 (Dirichlet 条件)

2. $y'(a) = \alpha, y(b) = \beta$ 第2種境界条件 (Neumann 条件)

3. $a_0y(a) - a_1y'(a) = \alpha, b_0y(b) + b_1y'(b) = \beta$ 第3種境界条件

などがあるが、今回はその中で第1種境界条件 (Dirichlet 条件) の場合について取り上げる。

2.3.2 解の存在と一意性

境界値問題の解の存在と一意性に関して、次の定理が知られている。

定理 2.2 (Lees(1961)) 関数 $f(x, y, z)$ は

$$D = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty\}$$

において連続、かつ連続な偏導関数 f_y, f_z をもち、D上

$$f_y \geq 0, \quad |f_z| \leq M \quad (M \text{ は正の定数})$$

をみたすとする。このとき境界値問題 (2.4),(2.5) は $a \leq x \leq b$ において少なくとも C^2 級の解をただ1つもつ。

第 3 章

差分法

3.1 はじめに

この章では、微分方程式の境界値問題を数値的に解く手法として知られている差分法について説明する。差分法とは、微分方程式の未知関数の導関数を差分商で置き換え、得られる離散化された差分方程式を解くことでもとの微分方程式の近似解を求める手法である。まず、区間を等分割に選ぶ差分法について説明したあと、不等分割による差分法を紹介する。

3.2 等分割近似を用いた差分法

3.2.1 差分近似

準備として導関数 $f'(x), f''(x)$ の近似の方法を説明する。 $f(x)$ が C^m 級の時、 x の近傍 $h > 0$ として

$$\left. \begin{aligned} f(x \pm h) &= f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) \pm \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \cdots \\ &\quad + \frac{(\pm h)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x) + R_m \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$R_m = \frac{(\pm h)^m}{m!}f^{(m)}(x \pm \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

となる。 $f(x+h)$ の展開で $f^{(3)}$ 以降を打ち切ると

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}f''(\xi) \quad (x < \xi < x+h)$$

一方、 $f(x-h)$ の展開で $f^{(3)}$ 以降を打ち切ると

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2}f''(\xi) \quad (x-h < \xi < x)$$

を得る。上の2式はともに打ち切り誤差が $O(h)$ であることがわかる。特に、 $f(x)$ が C^3 級の時、(3.1) の $f(x+h)$ と $f(x-h)$ の両辺を引いて、 $f^{(4)}$ 以降を打ち切ると

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi) \quad (x-h < \xi < x+h)$$

を得る。この式は打ち切り誤差が $O(h^2)$ であることがわかる。以上より $f'(x)$ に関して次の差分近似がつけられる。

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &: \quad 1 \text{ 階の前進差分近似} \\ \frac{f(x) - f(x-h)}{h} &: \quad 1 \text{ 階の後退差分近似} \\ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} &: \quad 1 \text{ 階の中心差分近似} \end{aligned}$$

$f(x)$ が C^4 級ならば (3.1) の $f(x+h)$ と $f(x-h)$ の両辺を引いて、 $f^{(5)}$ 以降を打ち切ると

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi) \quad (x-h < \xi < x+h)$$

を得る。よって、 $f''(x)$ に関して打ち切り誤差 $O(h^2)$ の差分近似がつかれる。

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{2h} \quad : \quad \text{2階の中心差分近似}$$

ここで、刻み幅 h が大きいと打ち切り誤差のため近似の精度が悪くなるが、 h が小さすぎても丸め誤差のため精度が悪くなってしまふことに注意する。

3.2.2 差分方程式

常微分方程式の2点境界値問題

$$\left. \begin{aligned} Ly &\equiv -y'' + f(x, y, y'), \quad a < x < b \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

について、前節の中心差分近似を用いて差分方程式を構築してみよう。 L は右辺で定義される微分演算子を表す。ここで、 h を正の定数として導関数 y', y'' を中心差分近似すると (3.2) は

$$L_h y(x) = -\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + f\left(x, y(x), \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}\right)$$

となる。 L_h は右辺で定義される差分演算子を表す。 $y(x)$ が C^4 級するとき

$$L_h y(x) - Ly(x) = -\frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi) + \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta) f_z(x, y, \zeta) = O(h^2)$$

$$\xi, \eta \in (x-h, x+h), \zeta = y'(x) + \theta \left(\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2} - y'(x) \right) \quad (0 < \theta < 1)$$

とかける。ここで区間 $[a, b]$ を $n+1$ 等分して刻み幅 h を等間隔にとる、つまり

$$h = \frac{b-a}{n+1}, \quad x_j = a + jh \quad (0 \leq j \leq n+1)$$

とすると、 n 元連立非線形方程式

$$\left. \begin{aligned} L_h^*(Y_j) &\equiv -\frac{Y_{j+1} - 2Y_j + Y_{j-1}}{h^2} + f\left(x_j, Y_j, \frac{Y_{j+1} - Y_{j-1}}{2h}\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ Y_0 &= \alpha, \quad Y_{n+1} = \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

の解 Y_j は、 h が十分小さいとき、 x_j における厳密解 y_j の近似解であることが期待される。差分解の存在と一意性、および精度について次の定理が知られている。

定理 3.1 (H.B.Keller) $f(x, y, z)$ は定理 2.2 の仮定に加えて、適当な正定数 K_*, K^* により

$$0 < K_* < f_y < K^*, (x, y, z) \in D$$

をみたすとする。 $h \leq \frac{2}{M}$ のとき、(3.3) の解 Y_1, \dots, Y_n は一意に存在して

$$\max_{1 \leq j \leq n} |y(x_j) - Y_j| \leq \frac{1}{K_*} \max_{1 \leq j \leq n} |L_h y(x_j)| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

特に、 $y(x)$ が C^4 級ならば

$$\max_{1 \leq j \leq n} |y(x_j) - Y_j| \leq O(h^2)$$

ここで (3.3) を (有限) 差分方程式、その解 Y_j を (有限) 差分解という。また

$$\tau_j = L_h y(x_j) - (L_h - L)y(x_j)$$

を $x = x_j$ における L_h (または L_h^*) の局所離散化誤差 (または局所打ち切り誤差) とい

$$\tau = \max_j |\tau_j|$$

を大域離散化誤差 (または大域打ち切り誤差) という。

3.2.3 解法

実際に次の 2 点境界値問題

$$\left. \begin{aligned} u'' &= p(x)u' + q(x)u + r(x), \quad a < x < b \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

を考え、差分法を適用してみる。 $h = \frac{b-a}{n+1}$, $x_j = a + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n$), $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $r_j = r(x_j)$, $u_j = u(x_j)$ の近似値を U_j とおき、(3.4) に中心差分近似を適用すると

$$-\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + p_j \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} + q_j U_j + r_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

すなわち

$$\left(-1 - \frac{hp_j}{2}\right)U_{j-1} + (h^2q_j + 2)U_j + \left(-1 + \frac{hp_j}{2}\right)U_{j+1} = -h^2r_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} a_j &= -1 - \frac{hp_j}{2} \\ b_j &= h^2q_j + 2 \\ c_j &= -1 + \frac{hp_j}{2} \\ d_j &= -h^2r_j \end{aligned}$$

とおくと次の差分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_j U_{j-1} + b_j U_j + c_j U_{j+1} &= d_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ U_0 &= \alpha, \quad U_{n+1} = \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

(3.5) は未知数 U_j に関する n 元連立一方程式であり、次の行列式で表現できる。

$$AU = v \quad (3.6)$$

ここで A, U, v は次のような行列およびベクトルである。

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & O \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ O & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} d_1 - \alpha a_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n - \beta c_n \end{pmatrix}$$

このように、線形境界値問題は連立一次方程式に帰着されるので、適当な数値解法によって解を求めることができる。なお、微分方程式が非線形ならば連立一次方程式は連立非線形方程式によりおきかえられる。この場合、解法としては Newton 法等を用いる。

以上のように、微分方程式の導関数を差分近似して差分方程式をつくり、その差分解をもとの微分方程式の近似解として求める方法を差分法という。容易にわかるように、差分方程式 (3.6) の大域離散化誤差 τ_j は各点 x_j において $O(h^2)$ であり、Keller の定理 (定理 3.1) によって、差分解の精度は $O(h^2)$ である。

3.3 不等分割近似を用いた差分法

次に、前の等分割近似を用いた差分法をより一般化して、刻み幅を区間ごとに決める不等分割近似を用いた差分法について説明する。

3.3.1 Shortley-Weller 近似

2点境界値問題

$$\left. \begin{aligned} Lu(x) &\equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

を考える。ただし、 $p \in C^4[a, b], q, f \in C[a, b], p > 0, q \geq 0$ とする。このとき

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \max_i h_i$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \quad x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$

$$p_{i\pm\frac{1}{2}} = p(x_{i\pm\frac{1}{2}}), \quad u_i = u(x_i)$$

とする。ここで、 $x = x_i$ での2階導関数 $\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})|_{x=x_i}$ の差分近似を

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} &= \frac{p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}}{\frac{h_{i+1}+h_i}{2}} \\ &\quad + O(h_{i+1} - h_i) + O\left(\frac{h_{i+1}^3 + h_i^3}{h_{i+1} + h_i}\right) \end{aligned}$$

より

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}}{\frac{h_{i+1}+h_i}{2}} \quad (3.8)$$

で定義する。このように刻み幅 h_i を区間ごとに決める差分近似を Shortley-Weller 近似 (以下 S-W 近似) という。(3.8) を (3.7) に適用すると

$$\begin{aligned} L_h^* U_i &= \frac{2}{h_{i+1} + h_i} \left\{ \left(-\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}\right) U_{i-1} + \left(\frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}} + \frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} + \frac{h_{i+1} + h_i}{2} q_i\right) U_i + \left(-\frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+1}}\right) U_{i+1} \right\} \\ &= f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$a_i = \frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}$$

$$b_i = \frac{h_{i+1} + h_i}{2} q_i$$

とおくと、次の差分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{h_{i+1}+h_i}(-a_i U_{i-1} + (a_i + a_{i+1} + b_i)U_i - a_{i+1}U_{i+1}) &= f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ U_0 = \alpha, \quad U_{n+1} &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

(3.9) を行列で表現すると

$$H(A + B)U = v \quad (3.10)$$

となる。ここで H, A, B, U, v は次のような行列およびベクトルである。

$$H = \text{diag}\left(\frac{2}{h_1 + h_2}, \dots, \frac{2}{h_n + h_{n+1}}\right), \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & & & O \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a_{n-1} & a_{n-1} + a_n & -a_n \\ O & & & -a_n & a_n + a_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} f_1 + \frac{2a_1\alpha}{h_1+h_2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \frac{2a_{n+1}\beta}{h_n+h_{n+1}} \end{pmatrix}$$

また、 x_i における L_h^* の局所離散化誤差 τ_i は

$$\begin{aligned} \tau_i &= L_h^* u(x_i) - f(x_i) \\ &= L_h^* u(x_i) - Lu(x_i) \\ &= \begin{cases} O(h) & (h_i \neq h_{i+1}) \\ O(h^2) & (h_i = h_{i+1}) \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに $u = [u_1, \dots, u_n]^t, \tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]^t$ とおくと

$$H(A + B)u = v + \tau \quad (3.11)$$

(3.10), (3.11) より

$$H(A+B)(u-U) = \tau$$

行列 A および $A+B$ は既約優対角な L 行列であって、 $A+B \geq A$ かつ $0 \leq (A+B)^{-1} \leq A^{-1}([1])$ 。よって

$$|u-U| = |(A+B)^{-1}H^{-1}\tau| \leq A^{-1}H^{-1}|\tau| \leq \|\tau\|_{\infty}A^{-1}H^{-1}e \quad (3.12)$$

ただし $|u-U|, |\tau|$ は $u-U, \tau$ の各成分を絶対値でおきかえて得られる列ベクトルを表し e は各成分が 1 の列ベクトルを表す。ここで、 $\phi(x)$ を

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) = 1, \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解とすれば

$$\sigma \equiv L_h^*\varphi(x_j) = L_h^*\varphi(x_j) - L\varphi(x_j) = O(h_{j+1} - h_j) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

であるから、 $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]^t, \rho = [\rho_1, \dots, \rho_n]^t$ とおくと

$$HA\varphi = e + \rho \geq \frac{1}{2}e$$

これより $A^{-1}H^{-1}e \leq 2\varphi < \infty$ を得る。したがって、(3.12) より

$$|u-U| \leq 2\|\tau\|_{\infty}\varphi = \begin{cases} O(h) & ((h_1, \dots, h_{n+1}) \neq (h, \dots, h)) \\ O(h^2) & (h_1 = \dots = h_{n+1} = h) \end{cases}$$

であるが、実は $(A+B)^{-1}H^{-1}\tau$ をさらに詳しく調べることにより、どのような分割に対しても

$$\max_i |u_i - U_i| = \begin{cases} O(h^3) & \text{境界付近} \\ O(h^2) & \text{境界付近以外} \end{cases} \quad (3.13)$$

となることが近年、Manteuffel-White, Jr. [9]、山本 [10], [11], [12] 等により明らかになってきた。実際、定理 (3.1) より弱い仮定 $f_y \geq 0$ の下で、(3.2), (3.3) はそれぞれ一意解をもち、(3.13) が成り立つ。この結果が 2 次元楕円型問題に対して成り立つかどうかは興味ある問題であるが、1998 年、Ferreira-Grigorieff [7] は少なくとも 2 次元楕円型問題に対し、任意不等間隔格子を用いる S-W 近似解をもとにして、各差分長方形を対角線により 3 角形分割して得られる 2 変数の区分 1 次多項式は L_1 ノルムで 2 次精度をもつことを証明した。したがって、現在では (3.13) は 2 次元問題に対しても成り立つものと予想されている。

第 4 章

数値解の評価

4.1 はじめに

実際に常微分方程式の2点境界値問題の数値例をいくつか取り上げ、様々な分割を施してゆき数値実験を行う。この章では、その数値結果および精度に関する評価を述べる。

4.2 評価環境

数値実験のプラットフォームとして、CPU2.26GHz、主記憶容量 256MB の計算機を採用した。数値解を計算するプログラムを MATLAB 上で作成し、上記の計算機上で実行した。

4.3 数値例

4.3.1 数値例 1

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.1)$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

を考える。ただし

$$p(x) = 1$$

$$q(x) = 100$$

$$f(x) = -2\pi^2 \cos 2\pi x - 100 \cos^2 \pi x$$

とする。なお、真の解は $\frac{e^{10}-1}{e^{20}-1}[e^{10x} + e^{10}e^{-10x}] - \cos^2 \pi x$ である。真の解のグラフは図 4.1 のようになる。

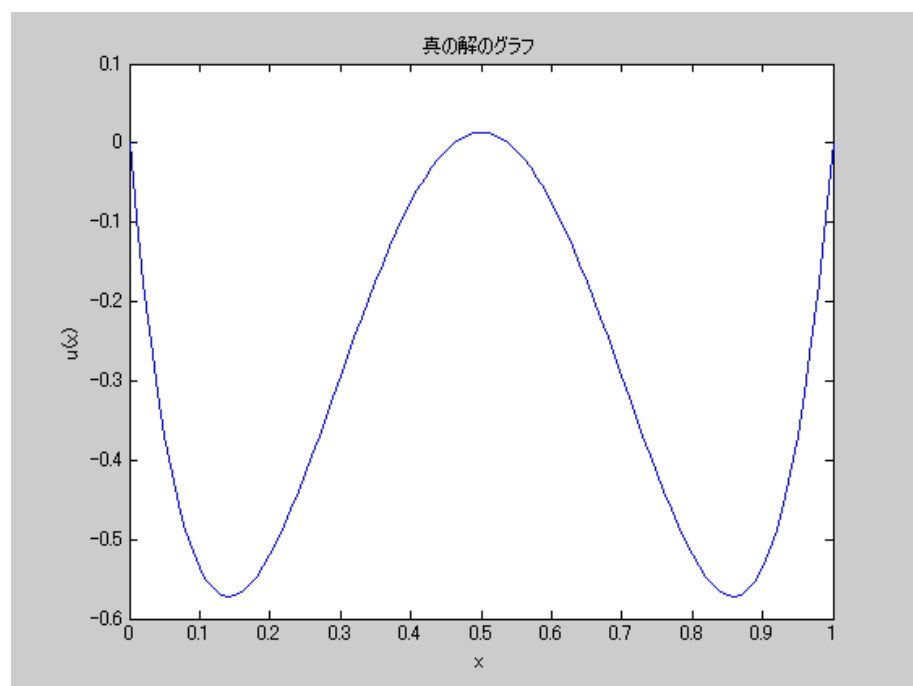


図 4.1: 真の解のグラフ

まず、区間 $[0, 1]$ を 100 等分割したときの誤差のグラフは図 4.2 のようになった。
なお、 $\max_i |u_i - U_i| = 1.330e-004$ となった。

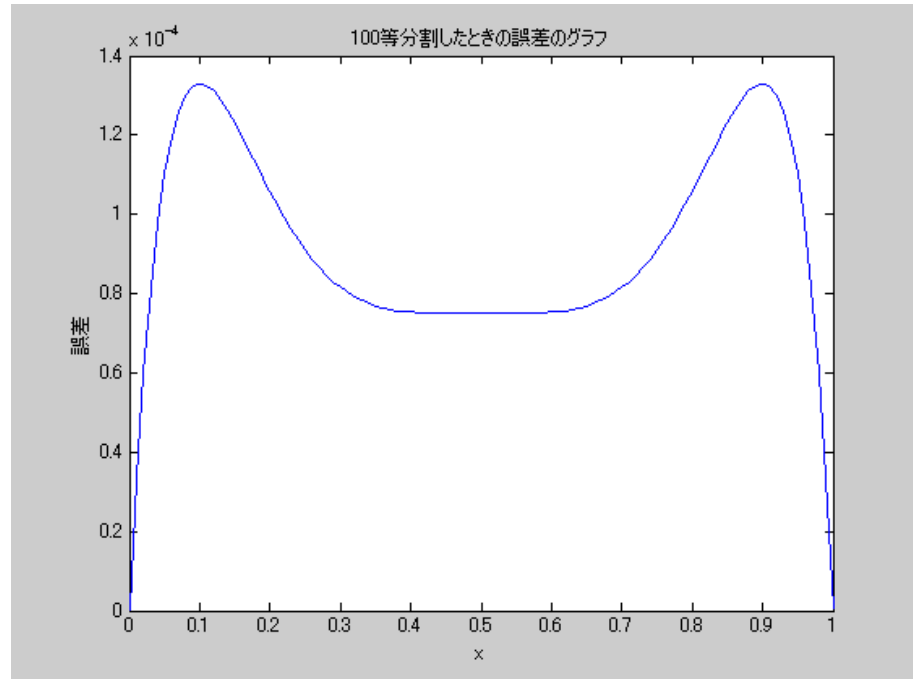


図 4.2: 100 等分割したときの誤差のグラフ

次に、誤差の大きくなった区間 $[0, 0.3]$, $[0.7, 1]$ で分割幅を変えていくことを考える。

まず現時点では、区間 $[0, 0.3]$, $[0.7, 1]$ はそれぞれ 30 等分割ずつされている。そこで、両区間の等分割数を徐々に増やしていき、最大誤差を見ていったとき最大誤差が最も小さくなったのは、区間 $[0, 0.3]$, $[0.7, 1]$ をそれぞれ 51 等分割したとき、すなわち 1.7 倍細かくしたときで、そのグラフは図 4.3 のようになった (表 4.1 も参照のこと)。
なお、 $\max_i |u_i - U_i| = 4.2425e-005$ となった。

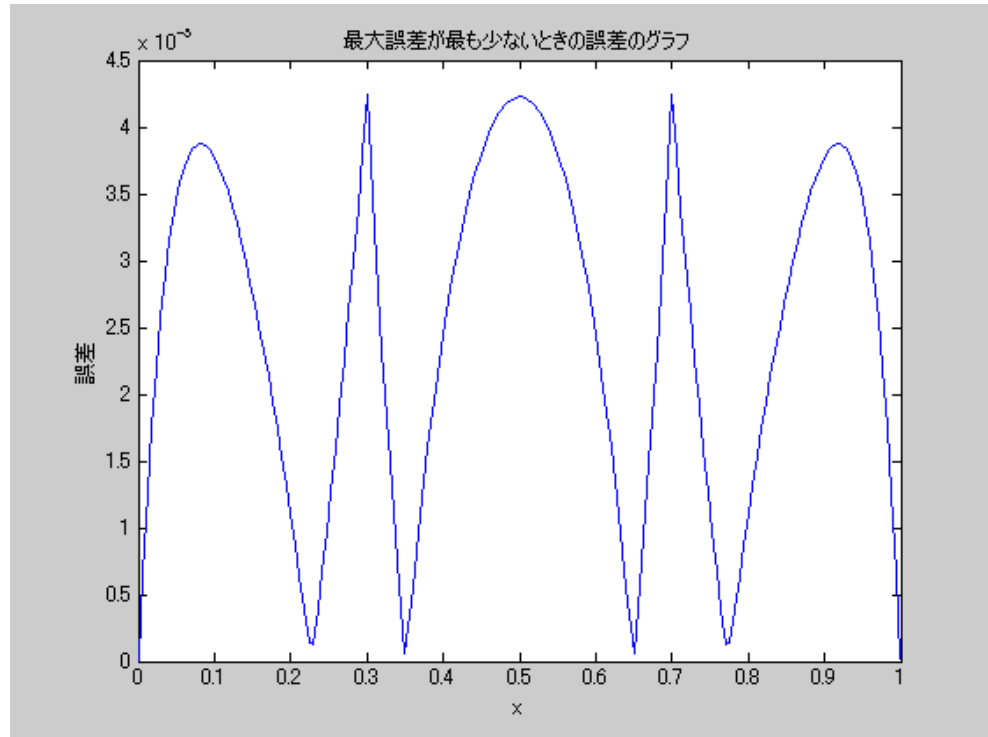


図 4.3: 最大誤差が最も少ないときのグラフ

区間 $[0, 0.3]$, $[0.7, 1]$ をそれぞれ 51 等分割以上しても、逆に全体の最大誤差があがってしまうことから、細かく刻みたい区間における刻み過ぎはよくないことがわかった。

[0, 0.3], [0.7, 1] の分割幅		[0, 0.3], [0.7, 1] における 最大誤差	[0, 1] における 最大誤差
分割数 m	$h=0.3/m$		
30	0.0100	1.3300e-004	1.3300e-004
31	0.0097	1.2372e-004	1.2372e-004
32	0.0094	1.1528e-004	1.1528e-004
33	0.0091	1.0774e-004	1.0774e-004
34	0.0088	1.0082e-004	1.0082e-004
35	0.0086	9.4450e-005	9.4450e-005
36	0.0083	8.8583e-005	8.8583e-005
37	0.0081	8.3237e-005	8.3237e-005
38	0.0079	7.8347e-005	7.8347e-005
39	0.0077	7.3812e-005	7.3812e-005
40	0.0075	6.9601e-005	6.9601e-005
41	0.0073	6.5686e-005	6.5686e-005
42	0.0070	5.8733e-005	5.8733e-005
44	0.0068	5.5622e-005	5.5622e-005
45	0.0067	5.2711e-005	5.2711e-005
46	0.0065	4.9986e-005	4.9986e-005
47	0.0064	4.7431e-005	4.7431e-005
48	0.0062	4.5036e-005	4.5036e-005
49	0.0061	4.2823e-005	4.3716e-005
50	0.0060	4.0741e-005	4.2967e-005
51	0.0059	4.2425e-005	4.2425e-005
52	0.0058	4.4926e-005	4.4926e-005
53	0.0057	4.7286e-005	4.7286e-005
54	0.0056	4.9516e-005	4.9516e-005
55	0.0055	5.1626e-005	5.1626e-005
56	0.0054	5.3624e-005	5.3624e-005
57	0.0053	5.5518e-005	5.5518e-005
58	0.0052	5.7314e-005	5.7314e-005
59	0.0051	5.9020e-005	5.9020e-005
60	0.0050	6.0642e-005	6.0642e-005

表 4.1: 区間 $[0, 0.3]$, $[0.7, 1]$ の等分割数を変えていったときの最大誤差の推移

4.3.2 数値例 2

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.2)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

を考える。ただし

$$p(x) = x + 1$$

$$q(x) = e^x$$

$$f(x) = 4\pi^2(x + 1)e^{\sin 2\pi x}(\sin 2\pi x - \cos^2 2\pi x) - 2\pi \cos(2\pi x)e^{\sin 2\pi x} + e^{\sin 2\pi x} - e^x$$

とする。なお、真の解は $u = e^{\sin 2\pi x} - 1$ である。真の解のグラフは図 4.4 のようになる。

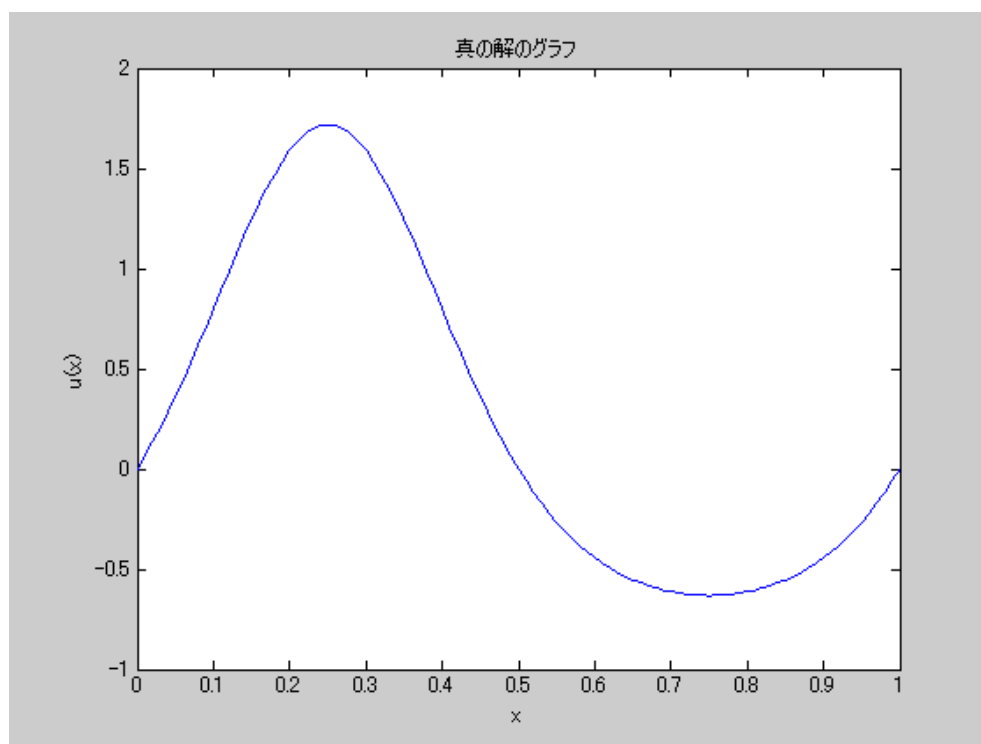


図 4.4: 真の解のグラフ

まず、区間 $[0, 1]$ を 100 等分割したときの誤差のグラフは図 4.5 のようになった。
なお、 $\max_i |u_i - U_i| = 1.2082e-003$ となった。

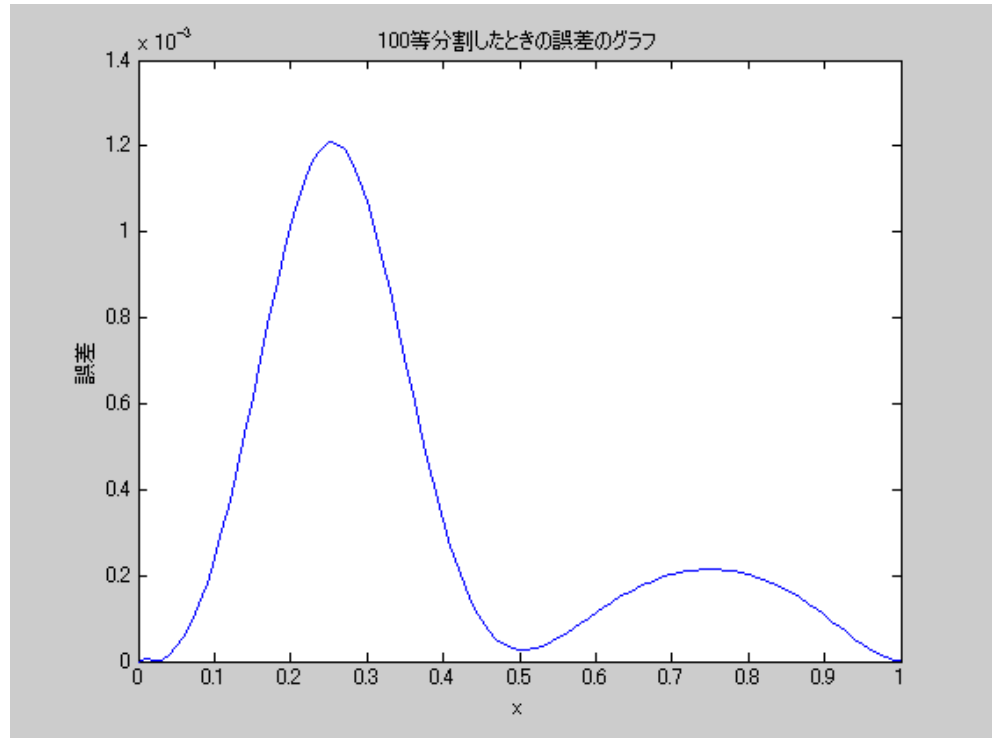


図 4.5: 100 等分割したときの誤差のグラフ

次に誤差の大きくなった区間 $[0.1, 0.4]$ で分割幅を変えていくことを考える。

まず現時点では、区間 $[0.1, 0.4]$ は 30 等分割されている。そこで、区間 $[0.1, 0.4]$ の等分割数を変えていき、最大誤差を見ていったとき最も最大誤差が小さくなったのは、区間 $[0.1, 0.4]$ を 23 等分割したとき、そのグラフは図 4.6 のようになった。(表 4.2 も参照のこと)

なお、 $\max_i |u_i - U_i| = 9.6604e-004$ であった。

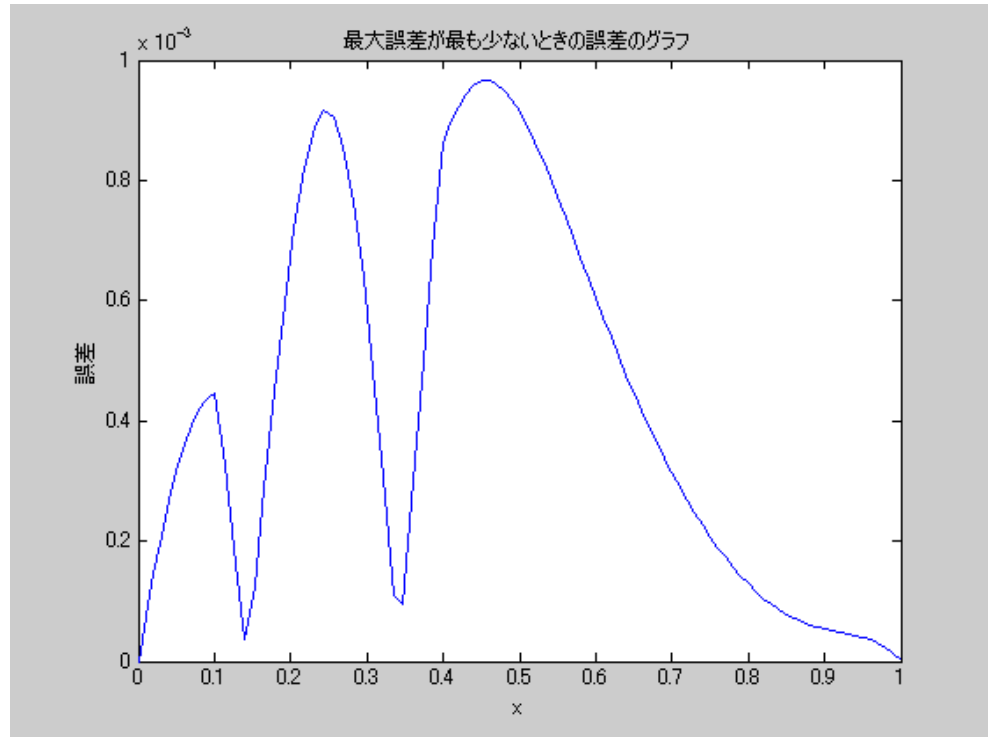


図 4.6: 最大誤差が最も少ないときのグラフ

[0.1, 0.4] の分割幅		[0.1, 0.4] における 最大誤差	[0, 1] における 最大誤差
分割数 m	$h=0.3/m$		
35	0.008571	1.325086e-003	1.325086e-003
34	0.008823	1.305620e-003	1.305620e-003
33	0.009090	1.283718e-003	1.283718e-003
32	0.009375	1.261280e-003	1.261280e-003
31	0.009677	1.236707e-003	1.236707e-003
30	0.010000	1.208248e-003	1.208248e-003
29	0.010344	1.179418e-003	1.179418e-003
28	0.010714	1.146667e-003	1.146667e-003
27	0.011111	1.108628e-003	1.108628e-003
26	0.011538	1.070385e-003	1.070385e-003
25	0.012000	1.023415e-003	1.023415e-003
24	0.012500	9.743259e-004	9.743259e-004
23	0.013043	9.171156e-004	9.660357e-004
22	0.013636	1.130586e-003	1.204798e-003
21	0.014285	1.438343e-003	1.484339e-003
20	0.015000	1.793431e-003	1.814597e-003
19	0.015789	2.206077e-003	2.210370e-003
18	0.016666	2.689433e-003	2.689433e-003

表 4.2: 区間 [0.1, 0.4] の等分割数を変えていったときの最大誤差の推移

表 4.2 及び、図 4.5, 図 4.6 より誤差の大きな区間 $[0.1, 0.4]$ 内の分割幅が、その他の区間の分割幅より大きいときに全体の最大誤差が最も少なくなっている。これは一般に推察される結果とは相反するものとなっているが、計算機の計算するときの誤差であろうか。そこで、今度は区間を $[0, 0.5]$ にし、端点を誤差の値の変化量が少ないところにとり、その区間で同様に等分割数を変えていき最大誤差を見ていく。このとき最も最大誤差が小さくなったのは、区間 $[0, 0.5]$ を 125 等分割したときで、そのグラフは図 4.7 のようになった。(表 4.3 も参照のこと)

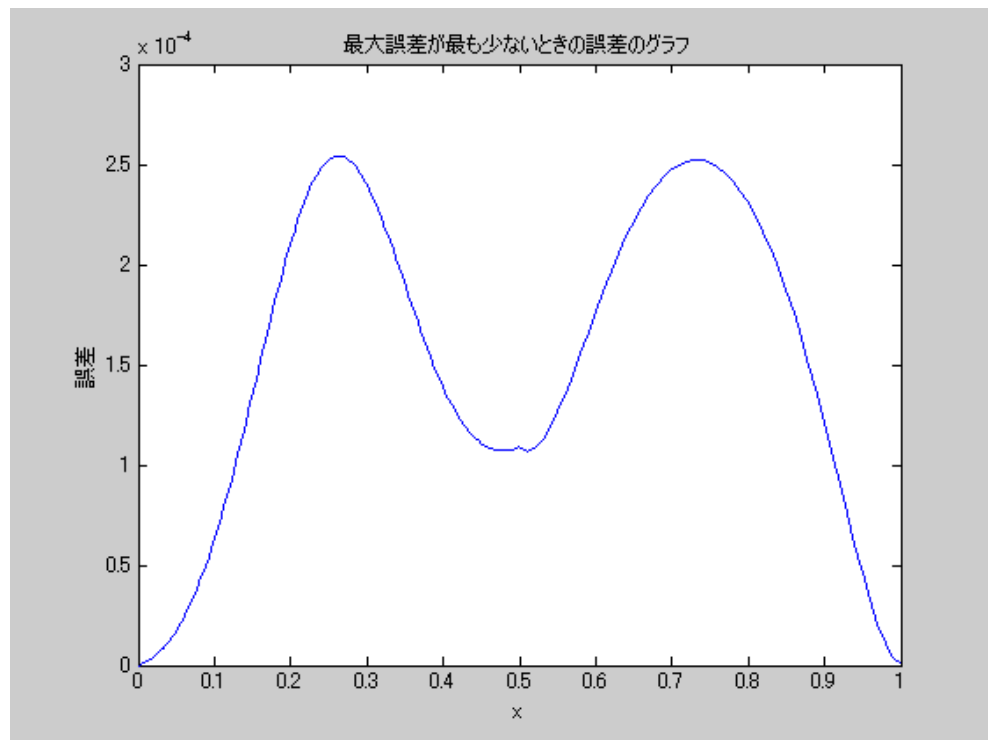


図 4.7: 最大誤差が最も少ないときのグラフ

$\max_i |u_i - U_i| = 2.5217e-004$ となり、前の場合よりも精度がよくなったので、誤差の変化量が少ない部分に端点をとったほうがよいと思われる。また区間 $[0, 0.5]$ における刻み幅を、他の部分より細かくしたほうがよいということも、一般的に推察されるとおりである。

[0, 0.5] の分割幅		[0, 0.5] における 最大誤差	[0, 1] における 最大誤差
分割数 m	$\tilde{h}=0.5/m$		
50	0.010000	1.208248e-003	1.208248e-003
51	0.009803	1.165163e-003	1.165163e-003
52	0.009615	1.122054e-003	1.122054e-003
53	0.009433	1.083854e-003	1.083854e-003
54	0.009259	1.045268e-003	1.045268e-003
55	0.009090	1.011252e-003	1.011252e-003
⋮	⋮	⋮	⋮
120	0.004166	2.666488e-004	2.666488e-004
121	0.004132	2.633729e-004	2.633729e-004
122	0.004098	2.602415e-004	2.602415e-004
123	0.004065	2.571476e-004	2.571476e-004
124	0.004032	2.541379e-004	2.541379e-004
125	0.004000	2.512138e-004	2.521687e-004
126	0.003968	2.483191e-004	2.522910e-004
127	0.003937	2.455535e-004	2.524105e-004
128	0.003906	2.427930e-004	2.525272e-004
129	0.003875	2.401502e-004	2.526412e-004
130	0.003846	2.375368e-004	2.527526e-004

表 4.3: 区間 [0, 0.5] の等分割数を変えていったときの最大誤差の推移

次に、確認のために細分区間 $[a, a+0.2]$ を設け、 $a = 0$ から 0.8 まで 0.1 ずつ変化させていったときの最大誤差の推移を出したのが図 4.8 である（表 4.4 も参照のこと）。なお、区間内の分割幅は 10^{-3} 、その他の分割幅は 10^{-2} としている。

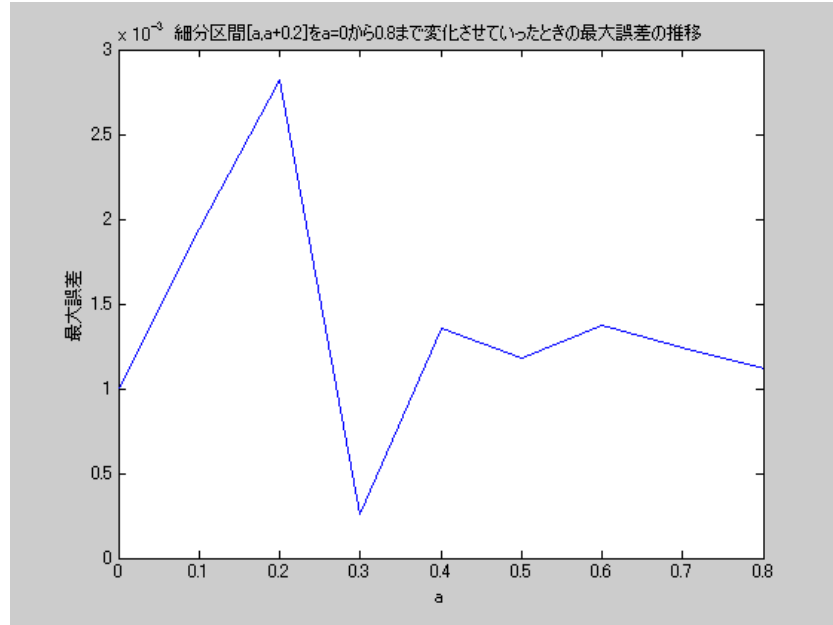


図 4.8: 細分区間 $[a, a+0.2]$ を $a=0$ から 0.8 まで変化させていったときの最大誤差の推移

a	$[a, a+0.2]$ における 最大誤差	$[0, 1]$ における 最大誤差
0	8.4720e-004	1.0074e-003
0.1	1.9450e-003	1.9450e-003
0.2	2.8225e-003	2.8225e-003
0.3	2.6251e-004	2.6251e-004
0.4	1.3534e-003	1.3534e-003
0.5	4.3214e-004	1.1793e-003
0.6	4.6172e-005	1.3701e-003
0.7	2.9245e-004	1.2439e-003
0.8	9.6267e-004	1.1162e-003

表 4.4: 細分区間 $[a, a+0.2]$ を $a=0$ から 0.8 まで変化させていったときの最大誤差の推移

図 4.8, 表 4.4 より、やはり最大誤差の変化の少ない点 $x = 0.3, 0.5$ に細分区間の端点きたときに、最も最大誤差が少なくなることがわかる。

第 5 章

結論と今後の課題

5.1 結論と今後の課題

本研究では、線形常微分方程式の2点境界値問題を対象として、不等分割近似を用いて様々な分割を施し数値実験を行った。その中からいえることは、まず細かく刻みたい区間における刻み過ぎはよくないということ。この点に関しては、本論文の例だけにとどまらずその他の微分方程式についてもあてはまっていたので、ほぼ間違いないといえる。また誤差の変化量が大きいところに細分区間の端点をとったときは、その他の部分の誤差に影響を与えてしまい、逆に精度がさがってしまった。したがってそこからいえることは、図5.1のように一番細かく刻みたい点 a に向かって徐々に分割幅を細かくしていき、 a を通過したら徐々に分割幅を広げていくという、不等分割点の前後の分割幅の差が小さくなるように分点をとる方法がよいと思われる。しかし、具体的にどれくらいずつ細かくしていけばいいかなどについては、まだわからない部分が多く今後の課題としていきたい。また、実際の計算では厳密解は不明であるから、誤差の変化が大きい点も不明である。ただ、本研究でわかったことは、数値解の変化の激しいところを細分しても、数値解は必ずしも改良されないという事実である。

なお、こういった特定の微分方程式だけでなく、より一般的な式についていえるような性質を調べることは、とても興味深い問題だと思うので、これも今後の課題としていきたい。

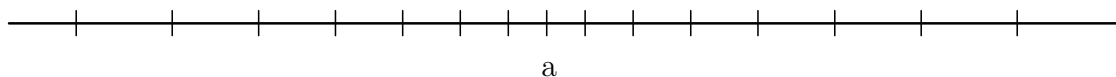


図 5.1: 最大誤差が少なくなると予想される分割点のとり方

謝辭

本論文の作成にあたり、山本哲朗教授・松永奈美博士には数々の御助言と御指導を賜り、深く感謝致しております。また、唯一の研究室のパートナーの内田博之氏には大変お世話になりました。本論文にご指導,ご協力を頂いた皆様に感謝致します。どうもありがとうございました。

参考文献

- [1] 山本 哲朗：数値解析入門 [増訂版], サイエンス社 2003
- [2] 草野 尚：境界値問題入門, 朝倉書店 1971
- [3] 齊藤 利弥：常微分方程式論, 朝倉書店 1967
- [4] 森 正武：数値解析, 共立出版 1973
- [5] 洲之内 治男・石渡 恵美子：数値計算 [新訂版], サイエンス社 2002
- [6] 櫻井 鉄也：MATLAB/SCILAB で理解する数値計算 2003
- [7] J.A.Ferreira and R.D.Grigorieff, On the supraconvergence of elliptic finite difference schemes, Appl. Number. Math. 28 (1998), 275-292
- [8] H.B.Keller, Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems, Blaisdell, 1968
- [9] T.A.Manteuffel and A.B.White,Jr., The numerical solution of second-order boundary value problems on nonuniform meshes, Math. of Comp. 47 (1986), 511-535
- [10] T.Yamamoto, Harmonic relations between Green's functions and Green's matrices for boundary value problems, 京都大学 RIMS 講究録, 2000
- [11] T.Yamamoto, 同上 II, 京都大学 RIMS 講究録, 2002
- [12] T.Yamamoto, 同上 III, 京都大学 RIMS 講究録, 2004